Über die Abhängigkeit zwischen gemittelten Werten von quadrierten Schalldrücken und der arithmetischen Mittelwertbildung von Schalldruckpegeln bei Messreihen

von
Kai-Uwe Ekrutt

November 2009

Erste Fassung 001.21112009

1. Einleitung

Der Inhalt dieser Ausarbeitung soll sich mit der Fragestellung beschäftigen, wie sich eine Reihe von Geräuschpegel-Messungen aus Versuchen mitteln lassen und welche Abhängigkeit zwischen der arithmetischen Mittelung von Schalldruckpegeln und der korrekten Mittelwertbildung durch Summation der quadrierten Schalldrücke existiert.
Eingangs sei erwähnt, dass die Mittelung einer Messdatenreihe von Schalldruckpegeln oder von Pegelwerten in Dezibel nicht einfach durch reine Addition jener Messwerte erfolgt, sondern die quadrierten Schalldrücke bzw. die entsprechenden Schallenergien aufsummiert werden müssten, die dann durch die Anzahl der Messungen zu dividieren wären. Da es jedoch etwas umständlich ist, die Pegelwerte (in Dezibel) in Schalldruck-Quadrate umzurechnen, die anschließend zu addieren und wiederum als Endergebnis in einen Pegelwert umzuwandeln sind, soll hier eine Möglichkeit aufgezeigt werden, wie man unter Ausnutzung der arithmetischen Mittelwertbildung und der Ableitung eines theoretischen Korrekturzuschlages ebenfalls zu einem adäquaten Ergebnis gelangen kann.

Da es sich hier um eine Theorie zur Berechnung von Mittelwerten handelt, müssen diesem hypothetischen Ansatz folgende Bedingungen zu Grunde liegen.

Bedingungen:

- Es muss eine ausreichend hohe Anzahl N von Messungen vorliegen.
- Die Messwerte (Pegelwerte) sollen sich gemäß der Normalverteilung (Gauß-Verteilung) verhalten.
- Zu stark streuende Messwerte, vor allem zu große Pegelwerte außerhalb der +2σ-Streubreite (2-fache Standardabweichung), werden nicht berücksichtigt.
- Die Messungen stammen von einer einzigen Schallquelle. Es handelt sich nicht um Einzelmessungen unterschiedlichster lokal angesiedelter Schallquellen.

2. Berechnung von Schalldruckpegeln und deren Addition

Der Schalldruckpegel L_p in dB (Dezibel):

$$L_p = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_i^2}{p_0^2}\right)\ dB = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_i}{p_0}\right)\ dB$$

mit $p_0 = 20\mu Pa = 2 \times 10^{-5}$ Pa : Bezugsschalldruck
p_i : gemessener Schalldruck

Schalldruckpegelberechnung aus dem Mittelwert der quadrierten Schalldrücke:

$$L_{\bar{p}} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{p_1^2}{p_0^2} + \frac{p_2^2}{p_0^2} + \frac{p_3^2}{p_0^2} + ... + \frac{p_N^2}{p_0^2}\right)\right]\ dB = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{N}\left(10^{\frac{Lp_1}{10}} + 10^{\frac{Lp_2}{10}} + 10^{\frac{Lp_3}{10}} + ... + 10^{\frac{Lp_N}{10}}\right)\right]\ dB$$

N: Anzahl der Messwerte, über die gemittelt werden soll

Da sich die Schallenergien proportional zur den quadrierten Schalldrücken verhalten, kann man der obigen Gleichung entnehmen, dass hier die Mittelung aus der Gesamtschallenergie erfolgt.

3. Die Gauß-Verteilung bzw. Normalverteilung

Bei der Gauß-Verteilung (auch Glockenkurve genannt) handelt es sich um eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung. In den Ingenieurwissenschaften lassen sich Prozesse annähernd gut durch eine Normalverteilung beschreiben, sodass sie die Standardgrundlage für die statistische Erfassung von Messungen bildet.
Als Eingangsvoraussetzung soll die Verteilung der im Versuch gemessenen Schalldruckpegel (N ist ausreichend groß) in Annäherung zu der Gauß'schen Glockenkurve stehen.

Die Normalverteilung h(x):

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^2}$$

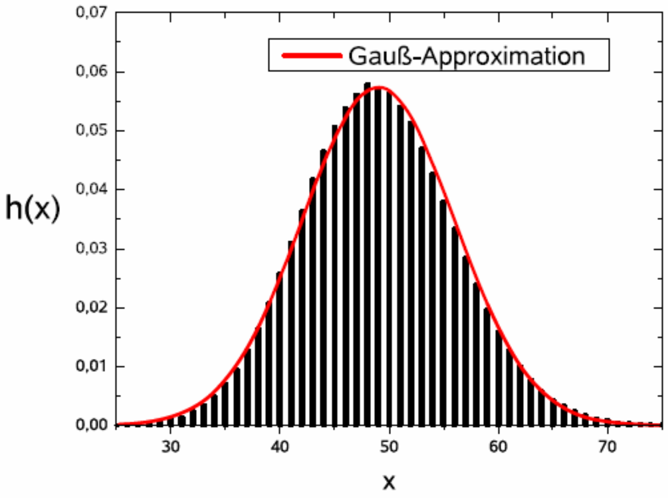
mit dem arithmetischen Mittelwert M:

$$M = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_i$$

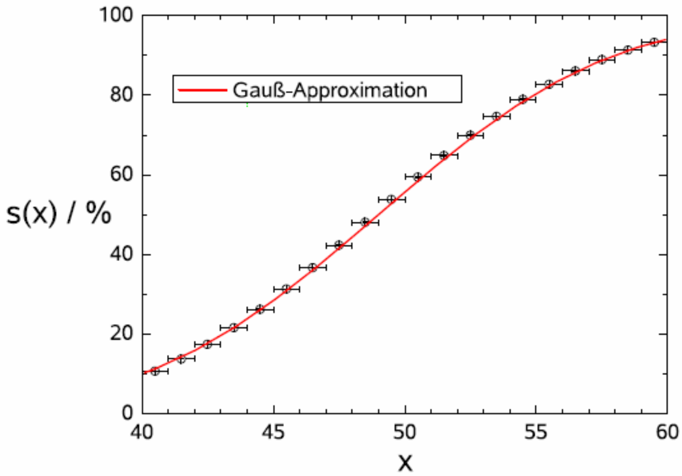
und mit der Standardabweichung σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}(x_i - M)^2}$$

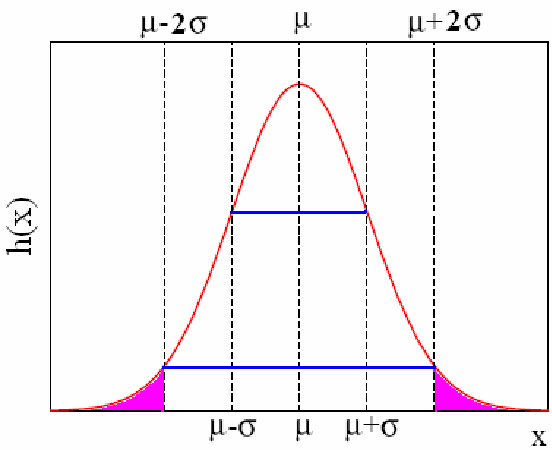
Die Standardabweichung σ sagt näherungsweise etwas darüber aus, wie viele der Messwerte sich innerhalb einer gewählten Streubreite (vom Mittelwert her betrachtet) von der Normalverteilungsfunktion berücksichtigt worden sind. Innerhalb einer Streubreite von M±1σ befinden sich 68,3% aller Messungen und innerhalb einer Streubreite von M±2σ befinden sich 95,5% aller Messungen.
D.h., mit der Bedingung, dass eine Streubreite von ±2σ betrachtet werden soll, liegen etwa 4,5 % der untersuchten Messwerte außerhalb dieser gesetzten Schranken, also jeweils 2,25% links und rechts der zur Untersuchung stehenden Glockenkurve.



Empirische Häufigkeitsfunktion



Empirische Verteilungsfunktion



Bei einer Gauß-Verteilung liegen 68,27% der Messwerte im Intervall $(\mu\text{-}\sigma, \mu+\sigma)$ und 95,45% im Intervall $(\mu\text{-}2\sigma, \mu+2\sigma)$.
μ ist in diesem Fall der Mittelwert.

Wahrscheinlichkeiten p innerhalb von $\pm n\sigma$-Bereichen einer Normalverteilung.

a)

n	$p(\pm n\sigma)$
1	0.6827
2	0.9545
3	0.9973
4	$1 - 6.3 \cdot 10^{-5}$

b)

$p(\pm n\sigma)$	n
0.900	1.645
0.950	1.960
0.990	2.576
0.999	3.290

4. Die Mittelwertbildung aus den normalverteilten Schalldruckpegeln

Um eine allgemeine Berechnungsgrundlage abzuleiten, die uns im Späteren dazu gereichen wird, eine vereinfachte Form der Mittelung bei einer Vielzahl von Einzelmessungen anwenden zu können, soll zuerst der Ansatz bzgl. einer unendlich großen Anzahl an Messungen gewählt werden ($N \rightarrow \infty$). In diesem Fall kann die Betrachtungsweise an der kontinuierlich verlaufenden Normalverteilungsfunktion erfolgen.
Wir stellen uns daher vor, sämtliche Abzissenwerte (x-Achse) der Normalverteilung entsprechen den gemessenen Schalldruckpegeln in dB. Um im ersten Schritt eine annähernde Standardabweichung σ bzw. einen Mittelwert M zu erhalten, werden die Schalldruckpegel arithmetisch gemittelt. Mit der gewählten Streubreite ±2σ und dem Mittelwert M liegt dann die Form und die Beschränkung der zu untersuchenden Normalverteilung h(x) vor.

Um im weiteren Rechengang eine vereinfachte Gleichungsform zu erhalten, verwenden wir statt der Mittelwerte M und der Standardabweichung σ nur den zehnten Teil dieser Zwischenergebnisse:

$$M^* = \frac{M}{10} \qquad \sigma^* = \frac{\sigma}{10} \qquad x_i^* = \frac{x_i}{10} \mathrel{\hat{=}} \frac{L_{p_i}}{10}$$

Der Folgeschritt ist dann, die korrekte Mittelwertbildung aus den Schallenergien bzw. den quadrierten Schalldrücken zu berechnen. Dieses kann z.B. mittels der Schalldruckpegel durch die Integration der Zehnerpotenzen innerhalb der gewählten Schranken von $M^* \pm 2\sigma^*$ geschehen.

Bei der Normalverteilung h(x) entsprechen die Schalldruckpegel den Werten x_i :

$$L_{p_i} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^2 = 10 \cdot \log_{10}\left(10^{\frac{L_{p_i}}{10}}\right) = x_i$$

$$x_i = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^2 = L_{p_i}$$

Somit entspricht die quadrierte Schalldruckrelation p_i^2 / p_0^2 bei x_i folgendem Wert:

$$\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^2 = 10^{\frac{L_{pi}}{10}} = 10^{\frac{x_i}{10}} = 10^{x_i^*}$$

Die richtige Gewichtung der Schalldruckrelationen $10^{\frac{x_i}{10}} = 10^{x_i^*}$ ergibt sich dann aus der Multiplikation mit der Normalverteilungsfunktion $h(x_i^*)$. [Schallenergie x Summenhäufigkeit]

$$f(x_i^*) = x_i^* \cdot h(x_i^*) = 10^{\frac{L_{pi}}{10}} \cdot \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^*-M^*}{\sigma^*}\right)^2} = 10^{\frac{x_i}{10}} \cdot \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^*-M^*}{\sigma^*}\right)^2} = 10^{x_i^*} \cdot \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^*-M^*}{\sigma^*}\right)^2}$$

Um alle Funktionswerte $f(x_i^*)$ innerhalb der Integrationsintervallschranken $-2\sigma^*$ und $+2\sigma^*$ zu summieren, leitet sich folgendes Integral ab:

$$F^*(L_{\tilde{p}}) = \int_{M^*-2\sigma^*}^{M^*+2\sigma^*} f(x_i^*) \cdot dx^* = \int_{M^*-2\sigma^*}^{M^*+2\sigma^*} 10^{\frac{L_{pi}}{10}} \cdot \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^*-M^*}{\sigma^*}\right)^2} \cdot dx^* = \int_{M^*-2\sigma^*}^{M^*+2\sigma^*} 10^{x_i^*} \cdot \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^*-M^*}{\sigma^*}\right)^2} \cdot dx^*$$

An dieser Stelle denken wir uns nun die mit *-gekennzeichneten Parameter als eine Konvention, dass wir hier mit dem zehnten Teil der Werte gerechnet haben und reduzieren die Gleichungsform wie folgt (*-Kennzeichnung entfällt):

$$\boxed{F(L_{\tilde{p}}) = \int_{M-2\sigma}^{M+2\sigma} 10^x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^2} \cdot dx}$$

Berechnung des Integrals $F(L_{\tilde{p}})$:

Für die Lösung des Integrals ist es von Vorteil, wenn das so genannte Gauß'sche Fehlerintegral [Verteilungsfunktion $\phi(z)$] bzw. die Fehlerfunktion [Error-Function Erf(z)] angesprochen werden, da mit deren Hilfe eine explizite Berechnung zwischen den Intergrationsintervallen möglich ist.

<u>Das Gauß'sche Fehlerintegral $\phi(z)$:</u>

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

Die Fehlerfunktion Erf(z):

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} \cdot dt$$

Diese beiden Funktionen stehen in einer gegenseitigen Abhängigkeit, sodass sie sich ineinander überführen lassen.

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} \cdot dt = 2 \cdot \phi\left(\sqrt{2} \cdot z\right) - 1$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2}\left(1 + Erf\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

Lösung zum Integral $F(L_{\tilde{p}})$:

$$F(L_{\tilde{p}}) = \int_{M-2\sigma}^{M+2\sigma} 10^x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

$$F(L_{\tilde{p}}) = \frac{1}{2\sigma} \cdot e^{\left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \cdot \ln(10)\right]^2} \cdot 10^M \cdot \sigma \cdot \left[Erf_1 + Erf_2\right]$$

$$F(L_{\tilde{p}}) = 10^{M + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \ln(10) - \log_{10}(2)} \cdot \left[Erf_1 + Erf_2\right]$$

mit:

$$Erf_1 = Erf\left[\sqrt{2} - \frac{\ln(10)}{\sqrt{2}} \cdot \sigma\right] = 2 \cdot \phi[2 - \sigma \cdot \ln(10)] - 1$$

$$Erf_2 = Erf\left[\sqrt{2} + \frac{\ln(10)}{\sqrt{2}} \cdot \sigma\right] = 2 \cdot \phi[2 + \sigma \cdot \ln(10)] - 1$$

$$F(L_{\tilde{p}}) = 10^{M + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \ln(10) - \log_{10}(2)} \cdot 2 \cdot \left(\phi[2 - \sigma \cdot \ln(10)] - 0{,}5 + \phi[2 + \sigma \cdot \ln(10)] - 0{,}5\right)$$

$$F(L_{\tilde{p}}) = 10^{M + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \ln(10)} \cdot \left(\phi[2 - \sigma \cdot \ln(10)] + \phi[2 + \sigma \cdot \ln(10)] - 1\right)$$

Diese Funktion würde die Gesamtheit aller Schalldruckquadrate entlang der Normalverteilungskurve angeben, also eine Summation über sämtliche Messungen widerspiegeln. Da wir aber einen Mittelwert errechnen wollen, muss hier noch die Division durch die Anzahl der Messungen erfolgen. Die Anzahl der Messungen entspräche hier dem Flächeninhalt der Glockenkurve zwischen den Intervallgrenzen, welcher bei einer Streuung von $\pm 2\sigma$ den schon oben angesprochenen Wert 95,45% = 0,9545 besitzt. Damit ergibt sich abschließend nun folgende Funktion.

$$F(L_{\tilde{p}})_{2\sigma} = 10^{M+\frac{\sigma^2}{2}\cdot\ln(10)-\log_{10}(0{,}9545)} \cdot \left(\phi[2-\sigma\cdot\ln(10)]+\phi[2+\sigma\cdot\ln(10)]-1\right)$$

$$F(L_{\tilde{p}})_{2\sigma} = 10^{M+\frac{\sigma^2}{2}\cdot\ln(10)-\log_{10}(0{,}9545)+\log_{10}(\phi[2-\sigma\cdot\ln(10)]+\phi[2+\sigma\cdot\ln(10)]-1)}$$

Das Ergebnis liefert den Mittelwert der quadrierten Schalldrücke bzw. der Schallenergien. Um wieder zu einem Schalldruckpegel zu gelangen, wäre dieser Wert lediglich zur Basis 10 zu logarithmieren. (Genau genommen wäre dann auch mit dem Faktor 10 zu multiplizieren, wenn mit dem zehnten Teil des Schalldruckpegels gerechnet wurde.)

$$\log_{10}\left(F(L_{\tilde{p}})_{2\sigma}\right) = M + \frac{\sigma^2}{2}\cdot\ln(10) - \log_{10}(0{,}9545) + \log_{10}\left(\phi[2-\sigma\cdot\ln(10)]+\phi[2+\sigma\cdot\ln(10)]-1\right)$$

D.h., wir können den Mittelwert der quadrierten Schalldrücke auch so auffassen, dass dieser sich aus dem arithmetischen Mittelwert M errechnet, dem noch ein Korrekturzuschlag $k_{2\sigma}(\sigma)$ zu addieren ist.

$$\boxed{\overline{L_{\tilde{p}_{2\sigma}}} = M + k_{2\sigma}(\sigma)}$$

mit: $$\boxed{k_{2\sigma}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2}\cdot\ln(10) - \log_{10}(0{,}9545) + \log_{10}\left(\phi[2-\sigma\cdot\ln(10)]+\phi[2+\sigma\cdot\ln(10)]-1\right)}$$

Hier sei zur Erinnerung noch erwähnt, dass der Mittelwert M aus dem zehnten Teil der Schalldruckpegel gebildet wurde! (siehe M* und σ*)

$$\boxed{M = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\frac{L_{p_i}}{10}}$$ und $$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}\left(\frac{L_{p_i}}{10}-M\right)^2}}$$

Da der Korrekturzuschlag $k_{2\sigma}(\sigma)$ nur eine Abhängigkeit zur Standardabweichung σ aufweist, lässt sich vereinfacht eine allgemeine Berechnungsvorschrift für die Mittelwertbildung angeben. Anhand der folgenden Tabellenwerte und Diagramme soll gezeigt werden, welche Korrekturwerte dem arithmetischen Mittelwert M noch zugeordnet werden müssten.

5. Die Werte des Gauß'schen Fehlerintegrals ϕ(z):

In der Tabelle 1 der folgende Seite sind tabellarisch die Werte für verschiedene z = 0 …3,5 angegeben.

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt$$

Tabelle 1: Gauß'sches Fehlerintegral

z	Fehlerintegral $\phi(z)$	z	Fehlerintegral $\phi(z)$
0,00	0,50000	0,05	0,51994
0,10	0,53983	0,15	0,55962
0,20	0,57926	0,25	0,59871
0,30	0,61791	0,35	0,63683
0,40	0,65542	0,45	0,67364
0,50	0,69146	0,55	0,70884
0,60	0,72575	0,65	0,74215
0,70	0,75804	0,75	0,77337
0,80	0,78814	0,85	0,80234
0,90	0,81594	0,95	0,82894
1,00	0,84134	1,05	0,85314
1,10	0,86433	1,15	0,87493
1,20	0,88493	1,25	0,89435
1,30	0,90320	1,35	0,91149
1,40	0,91924	1,45	0,92647
1,50	0,93319	1,55	0,93943
1,60	0,94520	1,65	0,95053
1,70	0,95543	1,75	0,95994
1,80	0,96407	1,85	0,96784
1,90	0,97128	1,95	0,97441
2,00	0,97725	2,05	0,97982
2,10	0,98214	2,15	0,98422
2,20	0,98610	2,25	0,98778
2,30	0,98928	2,35	0,99061
2,40	0,99180	2,45	0,99286
2,50	0,99379	2,55	0,99461
2,60	0,99534	2,65	0,99598
2,70	0,99653	2,75	0,99702
2,80	0,99744	2,85	0,99781
2,90	0,99813	2,95	0,99841
3,00	0,99865	3,05	0,99886
3,10	0,99903	3,15	0,99918
3,20	0,99931	3,25	0,99942
3,30	0,99952	3,35	0,99960
3,40	0,99966	3,45	0,99972
3,50	0,99977		

Für negative Werte von z gilt folgende Vorschrift:

$$\boxed{\phi(-z) = 1 - \phi(z)}$$

mit: $\phi(-\infty) = 0$

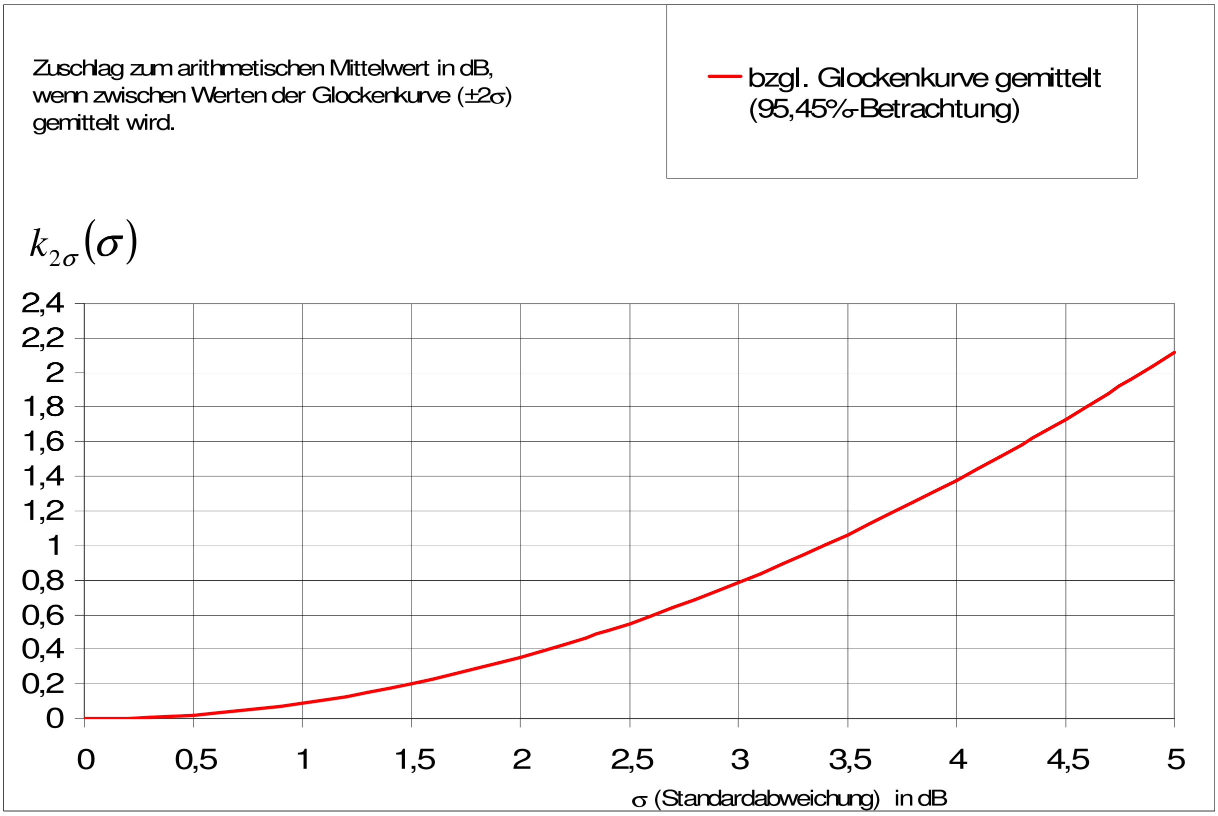
$\phi(+\infty) = 1$

6. Die Werte des Korrekturzuschlages $k_{2\sigma}(\sigma)$:

Tabelle 2: Korrekturzuschlag $k_{2\sigma}(\sigma)$

Standardabweichung σ = 10σ* in dB	Korrekturzuschlag bzgl. Streuung +/- 2σ in dB
0	0,000
0,1	0,000
0,2	0,003
0,3	0,008
0,4	0,014
0,5	0,022
0,6	0,032
0,7	0,043
0,8	0,056
0,9	0,072
1	0,088
1,1	0,107
1,2	0,127
1,3	0,150
1,4	0,173
1,5	0,199
1,6	0,226
1,7	0,255
1,8	0,286
1,9	0,319
2	0,353
2,1	0,389
2,2	0,426
2,3	0,465
2,4	0,506
2,5	0,549
2,6	0,593
2,7	0,639
2,8	0,686
2,9	0,736
3	0,786
3,1	0,838
3,2	0,892
3,3	0,948
3,4	1,005
3,5	1,063
3,6	1,123
3,7	1,185
3,8	1,248
3,9	1,312
4	1,378
4,1	1,446
4,2	1,515
4,3	1,585
4,4	1,657
4,5	1,730
4,6	1,805
4,7	1,881
4,8	1,958
4,9	2,037
5	2,117

Diagramm 1: Korrekturzuschläge in Abhängigkeit von σ



7. Rechenbeispiel mit Schalldruckpegeln (mit Binominalverteilung)

Um einer Normalverteilung annähernd gerecht zu werden, sollen sich die Messwerte des Beispiels gemäß einer Binominalverteilung verhalten. Für unseren Fall sollen die Binominalkoeffizienten für n = 6 die Anzahl der Einzelmessungen vorgeben:

1 Messung mit:	$L_{p_1} = 67dB$
6 Messungen mit:	$L_{p_2} = 68dB$
15 Messungen mit:	$L_{p_3} = 69dB$
20 Messungen mit:	$L_{p_4} = 70dB$
15 Messungen mit:	$L_{p_5} = 71dB$
6 Messungen mit:	$L_{p_6} = 72dB$
1 Messung mit:	$L_{p_7} = 73dB$

Das arithmetische Mittel und die dazugehörige Standardabweichung sind:

$M = 70dB$ $\quad\quad$ $\sigma = 1{,}234dB$ $\quad\quad$ $N = 2^n = 64$

Aus der Tabelle 2 oder dem Diagramm 1 kann der Korrekturzuschlag in Abhängigkeit von der Standardabweichung entnommen werden. Dieser würde für $\sigma = 1{,}234$ dB den theoretischen Wert von 0,135 dB annehmen.

$$k_{2\sigma}(\sigma = 1{,}234dB) = 0{,}135dB$$

womit sich folgendes Resultat ergäbe:

$$\overline{L_{\tilde{p}_{2\sigma}}} = M + k_{2\sigma}(\sigma) = 70dB + 0{,}135dB = 70{,}135dB$$

Die Frage ist nun, welcher Unterschied liegt zwischen diesem Wert und dem korrekt errechneten Mittelwert aus den quadrierten Schalldrücken?

$$L_{\bar{p}} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{N}\left(\frac{p_1^2}{p_0^2} + \frac{p_2^2}{p_0^2} + \frac{p_3^2}{p_0^2} + \ldots + \frac{p_N^2}{p_0^2}\right)\right] \; dB = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{N}\left(10^{\frac{Lp_1}{10}} + 10^{\frac{Lp_2}{10}} + 10^{\frac{Lp_3}{10}} + \ldots + 10^{\frac{Lp_N}{10}}\right)\right] \; dB$$

Würde man die Beispielmessungen hier einsetzen, dann ergibt sich der Mittelwert:

$$\underline{\underline{L_{\bar{p}} = 70{,}172dB}}$$

Das bedeutet einen relativen Fehler von 0,053% zwischen dem Ergebnis von $\overline{L_{\tilde{p}_{2\sigma}}}$ und $L_{\bar{p}}$.
Insofern kann man hier schon von einer adäquaten Annäherung mittels eines errechneten Korrekturzuschlages sprechen, der dem <u>arithmetischen Mittelwert</u> hinzugerechnet wird. Wichtig ist jedoch, dass keine zu großen Schalldruckpegel außerhalb der gesetzten Grenze $+2\sigma$ zugelassen werden, da hier der exponentielle Charakter der Schallenergien in entscheidendem Maße Einfluss auf die Korrekturzuschlage nimmt, diesen also übermäßig anwachsen lässt.
Im folgenden Abschnitt soll dieser Einfluss dargestellt werden, wenn wir die Glockenkurve über den gesamten Bereich (von M-∞ bis M+∞) integrieren.

8. Die Mittelwertbildung über die gesamte Normalverteilung

Als Ausgangsgleichung soll nun gelten:

$$\boxed{F(L_{\tilde{p}})_\infty = \int_{M-\infty}^{M+\infty} 10^x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^2} \cdot dx}$$

$$F(L_{\tilde{p}})_\infty = 10^{M + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \ln(10) - \log_{10}(2)} \cdot \left[Erf_{1\infty} + Erf_{2\infty}\right]$$

mit:

$$Erf_{1\infty} = Erf\left[\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{\ln(10)}{\sqrt{2}} \cdot \sigma\right]$$

$$Erf_{2\infty} = Erf\left[\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{\ln(10)}{\sqrt{2}} \cdot \sigma\right]$$

und mit: $c \to \infty$

somit:

$$Erf_{1\infty} = Erf[\infty]$$

$$Erf_{2\infty} = Erf[\infty]$$

bzw.: $Erf_{1\infty} = Erf_{2\infty} = 2 \cdot \phi(\infty) - 1 = 1$

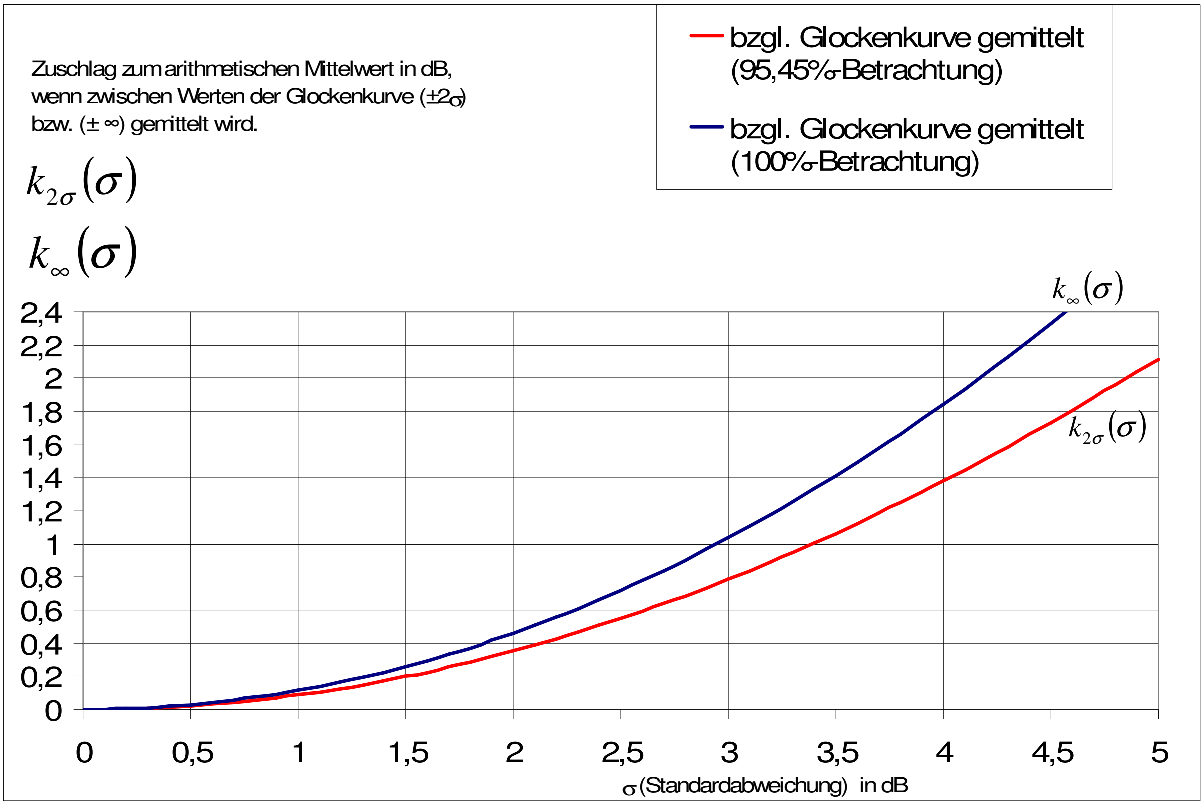
Damit resultiert die Gleichung:

$$F(L_{\tilde{p}})_\infty = 10^{M + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \ln(10) - \log_{10}(2)} \cdot 2 = 10^{M + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \ln(10)}$$

mit dem gemittelten Wert $\overline{L_{\tilde{p}_\infty}}$ und dem Korrekturzuschlag $k_\infty(\sigma)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{L_{\tilde{p}_\infty}} &= M + k_\infty(\sigma) \\ k_\infty(\sigma) &= \frac{\sigma^2}{2} \cdot \ln(10) \end{aligned}}$$

Diagramm 2: Korrekturzuschläge in Abhängigkeit von σ



9. Die Mittelwertbildung von zwei Messwerten

Zum Schluss soll auch noch der einfachste Fall einer Mittelwertbildung behandelt werden, nämlich den zwischen zwei Schalldruckpegeln. Die Berechnung der Standardabweichung vereinfacht sich dahingehend, dass lediglich die Differenz der beiden Schalldruckpegel halbiert werden muss.

Es sei: $L_{p_1} \leq L_{p_2}$

arithmetischer Mittelwert: $M = \dfrac{L_{p_2} + L_{p_1}}{2}$

Standardabweichung: $\sigma = \dfrac{L_{p_2} - L_{p_1}}{2}$

Der korrekt gemittelte Wert aus den Schalldrücken wäre dagegen:

$$L_{\bar{p}} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{2} \cdot \left(10^{\frac{L_{p1}}{10}} + 10^{\frac{L_{p2}}{10}}\right)\right] = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{2} \cdot \left(10^{\frac{L_{p1}}{10}} + 10^{\frac{L_{p1}+2\sigma}{10}}\right)\right]$$

$$L_{\bar{p}} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{L_{p1}}{10}}\left[1 + 10^{\frac{2\sigma}{10}}\right]\right] = 10 \cdot \left[\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{L_{p_1}}{10} + \log_{10}\left(1 + 10^{\frac{2\sigma}{10}}\right)\right]$$

$$L_{\bar{p}} = 10 \cdot \left[-\log_{10}(2) + \frac{L_{p_1} + \sigma}{10} - \frac{\sigma}{10} + \log_{10}\left(1 + 10^{\frac{2\sigma}{10}}\right)\right]$$

$$L_{\bar{p}} = 10 \cdot \left[-\log_{10}(2) + \frac{M}{10} - \frac{\sigma}{10} + \log_{10}\left(1 + 10^{\frac{2\sigma}{10}}\right)\right]$$

$$L_{\bar{p}} = M + \left[10 \cdot \log_{10}\left(1 + 10^{\frac{2\sigma}{10}}\right) - \sigma - 10 \cdot \log_{10}(2)\right] = M + k_2$$

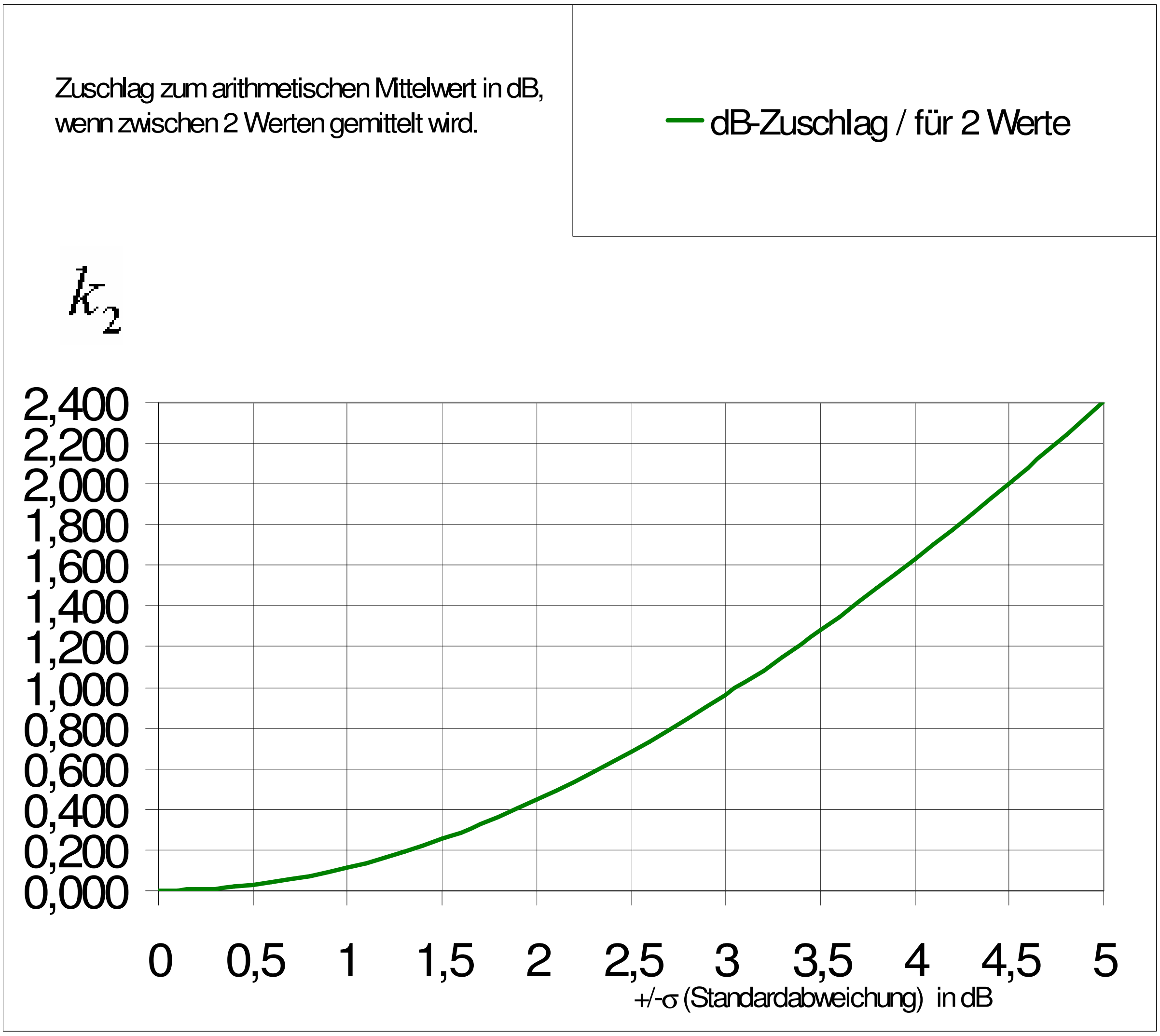
Der Korrekturwert k_2 ist demnach:

$$\boxed{k_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(1 + 10^{\frac{2\sigma}{10}}\right) - \sigma - 10 \cdot \log_{10}(2)}$$

Tabelle 3: Korrekturzuschlag k_2

Standardabw. σ in dB	Zuschlag zum Mittelwert in dB	Standardabw. σ in dB	Zuschlag zum Mittelwert in dB	Standardabw. σ in dB	Zuschlag zum Mittelwert in dB
0	0,000	2	0,445	4	1,629
0,2	0,005	2,2	0,535	4,2	1,776
0,4	0,018	2,4	0,632	4,4	1,927
0,6	0,041	2,6	0,736	4,6	2,083
0,8	0,073	2,8	0,846	4,8	2,242
1	0,114	3	0,963	5	2,404
1,2	0,164	3,2	1,086	5,2	2,569
1,4	0,222	3,4	1,214	5,4	2,737
1,6	0,288	3,6	1,347	5,6	2,907
1,8	0,363	3,8	1,486	5,8	3,080

Diagramm 3: Korrekturzuschlag k_2



10. Rechenbeispiel mit 2 Schalldruckpegeln (Mittelwertbildung)

$L_{p_1} = 77 dB$

$L_{p_2} = 79 dB$

arithmetischer Mittelwert: $M = \frac{L_{p_2} + L_{p_1}}{2} = 78 dB$

Standardabweichung: $\sigma = \frac{L_{p_2} - L_{p_1}}{2} = 1 dB$

$$k_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(1 + 10^{\frac{2\sigma}{10}}\right) - \sigma - 10 \cdot \log_{10}(2) = 4{,}124 dB - 1 dB - 3{,}010 dB = 0{,}114 dB$$

$$\underline{\underline{L_{\overline{p}} = M + k_2 = 78{,}114 dB}} \qquad \underline{\underline{L_{\overline{p}} = 10 \cdot \log_{10}\left[\frac{1}{2} \cdot \left(10^{\frac{L_{P1}}{10}} + 10^{\frac{L_{P2}}{10}}\right)\right] = 78{,}114 dB}}$$