Der Regenbogen

Eine Erklärung zum Phänomen der Regenbogenfarben vermittels der Anwendung des Prinzips von Fermat

(Pierre de Fermat: französischer Mathematiker 1601- 1665)

von
Kai-Uwe Ekrutt

Dezember 2013

Zweite Fassung 002.08122013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Wann immer wir einen majestätischen Regenbogen zu Gesicht bekommen, meiner Erfahrung nach ist mir dieses seltene Schauspiel bisher überwiegend zu den Abendstunden begegnet, fühlen wir uns meist davon in den Bann gezogen. Und wer in jenen Momenten in den Genuss kommt, das plötzlich am Himmel auftauchende und über mehrere Phasen variable Farbenspiel beobachten zu können, wird vielleicht auch die Feststellung gemacht haben, dass man beim Anblick dieser Himmelserscheinung gern mal die Zeit vergisst. Es überkommt einem das Gefühl von Freude und Gelassenheit in Anbetracht solcher eindrucksvollen Naturphänomene, man insistiert für einige Minuten in der Eigenschaft eines stillen und in sich ruhenden Beobachters. Und somit können wir für einen kurzen Zeitraum auch auf angenehmste Weise jeglichen Widrigkeiten und Stressfaktoren, die sich im Spannungsfeld des modernen Arbeitslebens und gesellschaftlichen Miteinanders für uns ergeben, einfach aus dem Wege gehen und in eine andere Welt entfliehen.

Die zuweilen kräftig leuchtende Farbenpracht eines Regenbogens hat seit jeher die Menschheit fasziniert und hat somit auch ihrer natürlichen Wissbegierde folgend über Jahrhunderte hinweg die Frage nach dem "Warum und dem Wieso" aktuell gehalten. Angefangen mit den detaillierten Erklärungsmethoden von René Descartes (1596-1650) am Tropfenmodell und dem Ausbau der geometrischen Optik durch Isaac Newton (1643-1727) und Christiaan Huygens (1629-1695) ist die Wegstrecke der immer komplexer zu durchschauenden Beschreibungen und Berechnungen zum Regenbogenphänomen bis in unsere heutige Zeit vorgedrungen. Die vielschichtigen Facetten des Regenbogens dienen damit bis zuletzt dazu, an ihm fortwährend die modernsten und rechenintensivsten Theorien aus dem Bereich der Physik auszutesten und bestätigen zu lassen. An ihm wird exemplarisch das weitere Verständnis über die Natur des Lichtes inklusive seiner quantenmechanischen Effekte immer mehr vertieft.
Dieses Skript soll jedoch kein Abriss über die hochmodernen Theorien und Methoden zur Berechnung von weiteren Interferenz-Bögen (Überlagerung von Lichtwellen verschiedenster Frequenzen) und Streuprozessen werden, die allesamt in die Erscheinung eines Regenbogens mit einspielen können. Diese Niederschrift soll sich einzig und allein dem Ziele verschreiben, einem möglichst großen Leserkreis eine noch verständliche Erklärung zu vermitteln, warum wir einen Regenbogen (Hauptbogen) und einen Nebenbogen sehen können und wie sich die unterschiedlichen Winkel dieser beiden Bögen erklären lassen. Ich möchte daher auf ein ganz fundamentales Naturprinzip zurückgreifen, mit dessen Hilfe eine völlig adäquate und ausreichende Beschreibung hervorgehen wird. Das sogenannte "Prinzip von Fermat" soll uns als roter Faden dienen, zum einen das qualitative Verständnis über das Licht und die Regenbogenerscheinung näher zu bringen, aber auch quantitative Ableitungen darüber anzustellen, unter welchen Winkeln sich welche Farben (Lichtfrequenzen) einstellen werden, wenn wir die Bögen visuell wahrnehmen.
Warum die Rückwärtsrolle hin zu einem "angestaubten" naturphilosophischen Prinzip, dessen Anfänge in der Mitte des 17.Jahrhunderts anzusiedeln sind? Natürlich könnte man hier auch mit den in der heutigen Schulphysik dargereichten Gesetzen der Optik agieren, wie z.B. dem Brechungsgesetz nach der Theorie von Willebrord Snellius (1580-1626). Es würde zum selben Ergebnis führen, jedoch mit dem Unterschied, dass der kausale Zusammenhang und die Wirkungsweise des Brechungsgesetzes allein in dem abgesteckten Rahmen der festgelegten Bedingungen der von Snellius begründeten Theorie besteht und zu verstehen ist. Beim "Prinzip von Fermat" werden wir dagegen ein weit höher gestelltes Naturprinzip erkennen können, auf welche Weise die Natur (in unserem Fall das Licht) stets zu verfahren gedenkt.

Um sich schrittweise mit dem "Prinzip von Fermat" vertraut machen zu können, sollen nachfolgend einige Beispiele genannt und auch ausgeführt werden, bevor wir uns dem eigentlichen Hauptthema "Regenbogen" widmen wollen. Anhand des Reflexions- und des Brechungsgesetzes soll veranschaulicht werden, warum das "Prinzip von Fermat" als Ausgangspunkt für die Herleitung jener Gesetzmäßigkeiten herangezogen werden kann. Ergänzend möchte ich aber auch kurz auf Luftspiegelungen und die höchst seltene Erscheinung des "Grünen Strahls" (Green Flash) eingehen, um ein tieferes Verständnis für die Anwendung dieses naturphilosophischen Ansatzes zu ebnen. Als Zwischenstation werde ich dann auch noch die Kegelschnitte behandeln, um zu zeigen, dass diese besonderen Kurven wie Ellipse, Parabel oder Hyperbel ganz spezielle Eigenschaften besitzen, die in der Optik überaus wichtig sind und beispielsweise bei astronomischen Fernrohren zur Anwendung kommen.

Doch bevor wir uns dem theoretischen Teil zuwenden, nur noch eine kurze Anmerkung zu den "scheinbaren" Dimensionen eines Regenbogens (beobachtet am Abend des 16.Juni 2012 / Ort: Herdecke).

Regenbogen über der Altstadt von Herdecke (Hauptbogen endet am Rathausplatz)

Aus der Position des Beobachters betrachtet würde sich hier für diesen Regenbogen ein ungefährer Radius ergeben, welcher über scheinbar 500 Meter besäße. Für den zweiten Bogen (Nebenbogen) rechts davon ergäbe sich dann ein Radius von ca. 600 Meter. Würde man also eines der höchsten Gebäude der Welt, wie z.B. das "Mecca Royal Clock Tower Hotel" mit einer Höhe von 601 Meter, ins Zentrum des Regenbogens platzieren, so würde das gigantische Uhrwerk des Turmes durch den Hauptbogen gehen und die Spitze des Gebäudes (= ein Halbmond) am Rande des Nebenbogens kratzen. Hier zeigt sich also, mit welch einem Ausmaß die Natur uns ein farbenfrohes Schauspiel mitunter bietet und zum Staunen bringt.

Vergrößertes Detail des Hauptbogens (Rathausplatz Herdecke)

Wie in beiden Bildern ganz schwach zu erkennen ist, befindet sich links vom violett-blauen Band ein weiteres schmales Interferenz-Band an der Innenseite des Bogens. Diese Interferenz-Erscheinungen, aber auch das sogenannte dunkle "Alexander-Band" zwischen den beiden Bögen (der verwaschene graue Zwischenbereich), werden nicht Gegenstand dieser Ausführungen werden. Hierzu müsste das theoretische Gebäude dann notwendigerweise weiter ausgebaut werden, was uns aber vom eigentlichen Ziel für ein Grundverständnis entfernen würde.
An einigen Stellen im Skript werde ich dennoch mathematische Ableitungen zur Vervollständigung mit angeben, wobei es dem Leser natürlich frei steht, sich näher damit zu befassen oder diese Gleichungen einfach zu überspringen. Zur Förderung des qualitativen Verständnisses werde ich jedoch den Versuch unternehmen, meine Erklärungen weitestgehend in einleuchtenden Worten wiederzugeben und mit anschaulichen Skizzen zu illustrieren. Das mathematische Kalkül nebenher sollte daher lediglich als eine Art begleitende Randnotiz zu verstehen sein, mit welchem auch der analytische Aspekt dieser Thematik zum Ausdruck kommt.

Kai-Uwe Ekrutt 09. Nov. 2013

1. Das Prinzip von Fermat

Das Prinzip vom Weg der kürzesten Zeit:

Das "Prinzip von Fermat" ist ein Gedankengang, welcher um 1650 entwickelt wurde und folgende Aussage zum Verhalten des Lichts beinhaltet:

Von allen möglichen Wegen, die das Licht im Raum nehmen könnte, um von dem Ausgangspunkt A zu einem Zielpunkt B zu gelangen, nimmt es den Weg, welcher die kürzeste Zeit benötigt.

Dieses Prinzip bildet somit einen Vorläufertyp für die späteren Probleme der sogenannten Variationsrechnung, einer mathematischen Disziplin, welche im 18. Jahrhundert durch Leonard Euler weiter ausgebaut wurde. Die Variationsprobleme dieser Art sind so gestaltet, dass beispielsweise die Addition sämtlicher Elemente einer bewegenden Aktion entlang einer Strecke oder Kurve von A nach B einen extremalen Wert annimmt, also minimal oder maximal wird. Diese Forderung nach einem extremalen Ergebnis ist die Ausgangslage dafür, den Wegverlauf zu finden, welcher zum Minimal- oder Maximalwert führen.

Mathematisch wird das "Prinzip von Fermat" durch ein Integral beschrieben, das zwischen den Intervallen A und B berechnet wird:

$$\int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} = Minimum$$

Hierbei drückt das "dt" die infinitesimalen Zeitschritte (unendlich kleine Zeitinkremente) aus, welche alle entlang des Weges von A nach B aufaddiert werden. Dasselbe Spiel kann man natürlich auch mit den infinitesimalen Wegschritten (unendlich kleine Weginkremente) machen, wenn man diese überall entlang des Pfades durch die dort entsprechend vorliegende Geschwindigkeit "v" teilt und alle diese Werte aufaddiert.
Beim Problem des Lichtverlaufes, aber auch bei vielen anderen Bewegungsproblemen der Mechanik, zeigt sich, dass das Licht sich genau diesen optimalen Pfad sucht, welcher insgesamt die kürzeste Zeit erfordert bzw. in der Addition der Zeitinkremente dt die kleinste Summe ergibt.

Die Anwendung der Variationsrechnung auf die Probleme der Mechanik hat Leonard Euler mit seinen Worten auf ganz spezielle Weise gewürdigt.

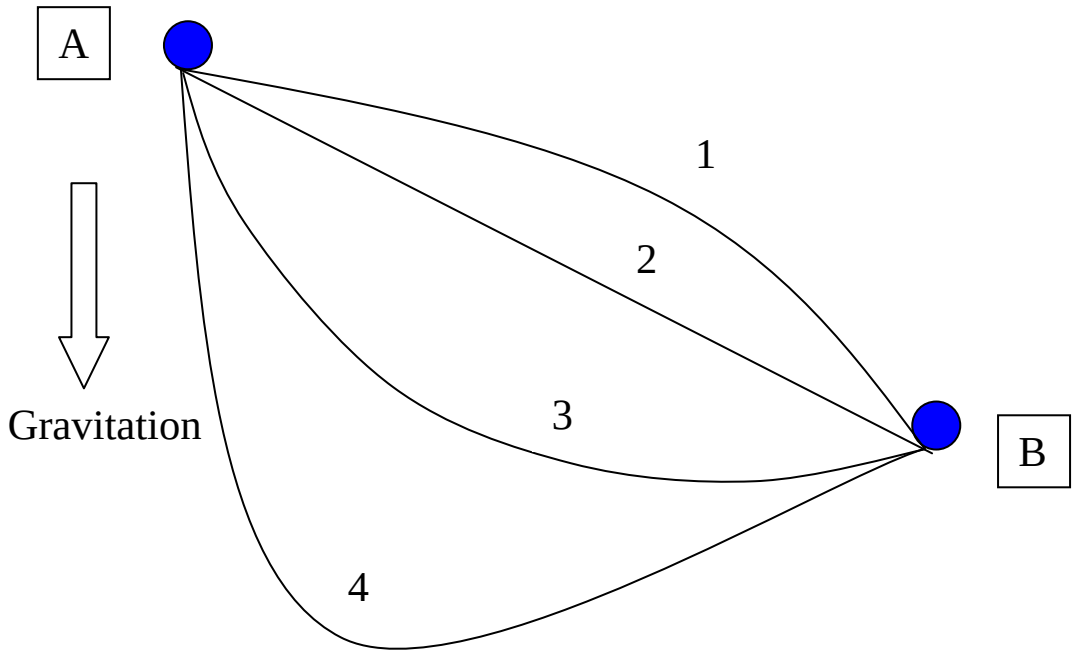
Leonhardt Euler (1707-1783)
Aus der Einleitung zu dem "Additamentum I" seiner "Methodus inveniendi":

"Da der Plan des gesamten Universums der vollkommenste ist und vom weisesten Schöpfer festgelegt, so geschieht nichts auf der Welt, dem nicht irgendein Verhältnis des Maximums oder Minimums zu Grunde liegt. Man wird also danach streben müssen, in jeder Art naturwissenschaftlicher Probleme die Größe zu bestimmen, die einen größten oder kleinsten Wert annimmt. Damit ist ein doppelter Weg zur Lösung naturwissenschaftlicher Fragen gegeben: Aus den Endursachen mit Hilfe der Methoden der Maxima oder Minima (a posteriori) oder aus den bewirkenden Ursachen (a priori). Man soll aber besonders darauf bedacht sein, die Lösung auf beiden Wegen herzuleiten. Dann wird nicht nur die eine zur Bestätigung der anderen dienen, sondern uns mit höchster Befriedigung erfüllen!"

Das Beispiel des Brachistochronen-Problems:
Anwendung des "Fermatschen Prinzips" bei fallenden Körpern

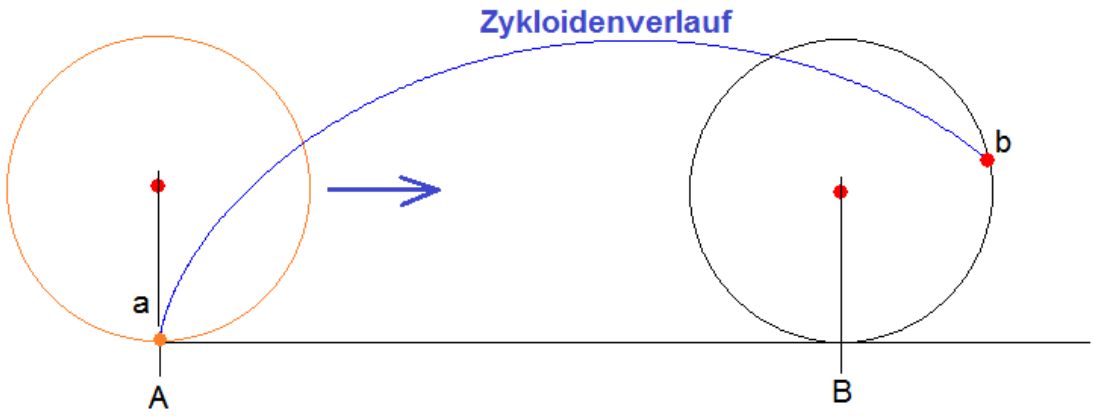
Wendet man das Prinzip der kürzesten Zeit auf das Problem eines fallenden Körpers infolge der Gravitation an, der sich von A (Startpunkt) aus nach B (Zielpunkt) bewegen soll, dann führt diese Problemstellung auf die Brachistochrone (gr. *brachistos* kürzeste, *chronos* Zeit).

Die folgende Darstellung soll das Problem näher erläutern:



Eine Kugel, die vom Punkt A nach B rollt, benötigt entlang der Kurve 3 die geringste Zeit. Der Kurvenverlauf des Weges 3 wird daher als Brachistochrone bezeichnet. Als Lösung des Problems handelt es sich bei der Kurve um eine Zykloide bzw. um ein Kurvenstück einer Zykloide. Alle anderen Kurven (1, 2 oder 4) benötigen eine längere Zeit, um von A nach B zu gelangen.

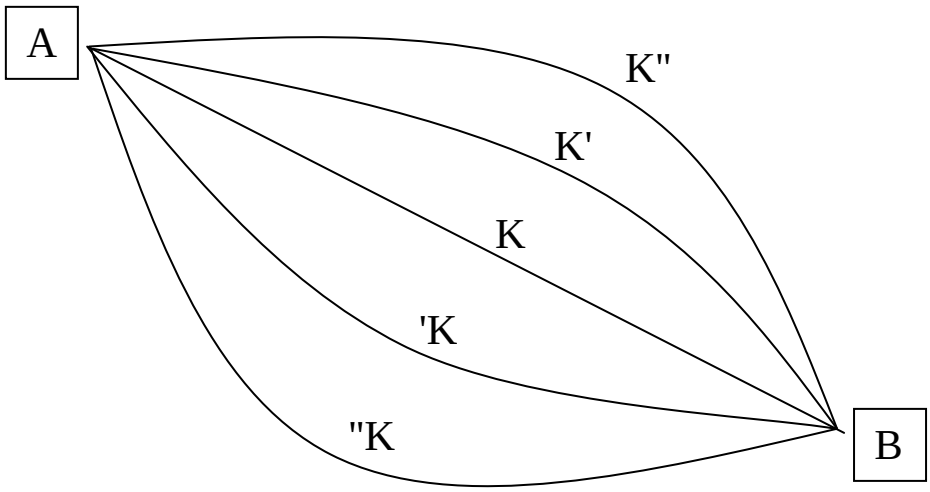
Bei einer Zykloiden handelt es um eine Abrollkurve eines Kreises entlang einer Geraden.
=> Skizze der Abrollkreise für den Punkt A und B auf der Geraden:



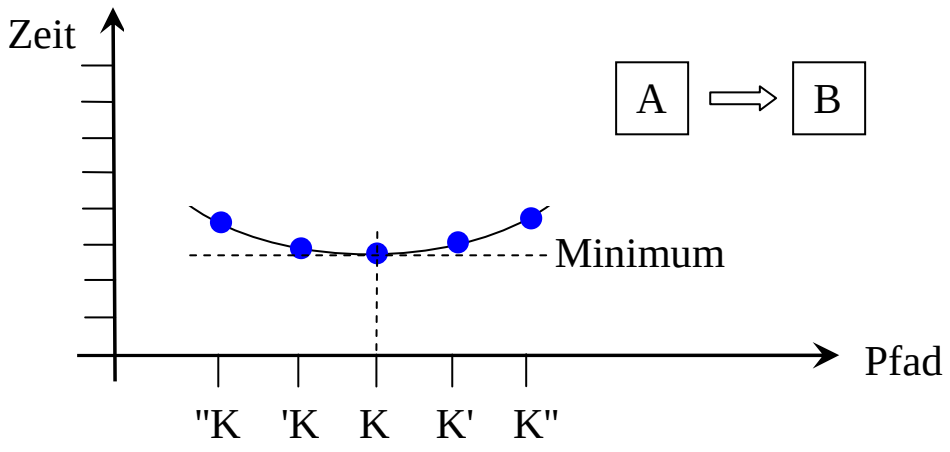
2. Die Bewegung des Lichtes durch Raum und Materie

Gemäß des Prinzips von Fermat soll sich Licht von A nach B bewegen:

Um sich Schritt für Schritt mit dem "Prinzip von Fermat" vertraut machen zu können, soll das "Prinzip der kürzesten Zeit" einmal auf jene Situation zur Anwendung kommen, bei welchem sich Licht (z.B. im Vakuum oder in einer homogenen Umgebung mit konstanter Temperatur und Dichte) von einem Punkt A nach B bewegt.
Wir wissen natürlich aus der Erfahrung, dass sich Licht in diesem Fall auf dem direkten Wege, also geradlinig, von A nach B fortpflanzt. Wenn wir aber das Problem auf sämtliche Wege verallgemeinern, die das Licht nehmen könnte, und nicht wüssten, dass eine Gerade die Lösung ist, dann würde man sich dieser Problemstellung folgenderweise nähern.



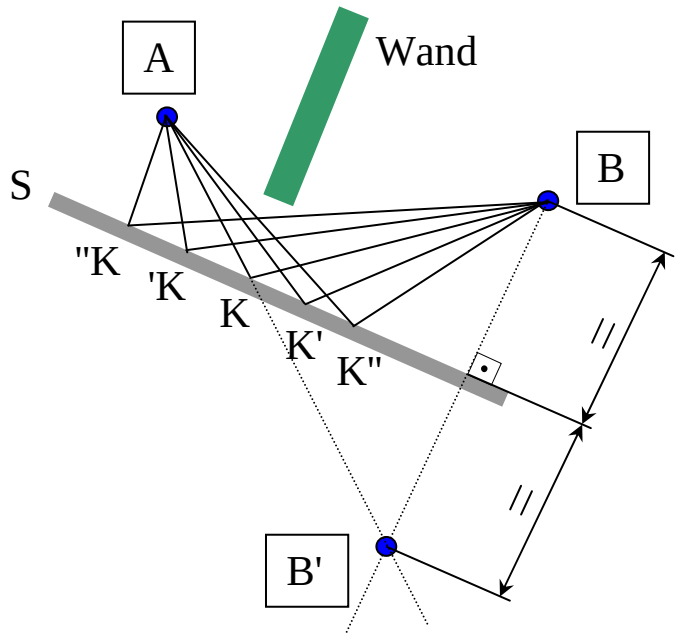
Wir betrachten beispielsweise 5 verschiedene Pfade von A nach B aus einer unendlichen Anzahl von möglichen Wegen. Da die Umgebung homogen sein soll, pflanzt sich das Licht an jedem Punkt in dieser Umgebung mit derselben Geschwindigkeit fort. Wir gehen dabei der Einfachheit halber davon aus, dass es sich hier um einfarbiges Licht (monochromatisches Licht einer bestimmten Frequenz) handelt. In diesem Fall haben wir es leicht, die Summe der Zeitschritte zu berechnen, denn sie entspricht im Verhältnis genau der Länge des Pfades von A nach B. Die benötigten Gesamtzeiten jedes Pfades lassen sich anschaulich in einem Diagramm darstellen.

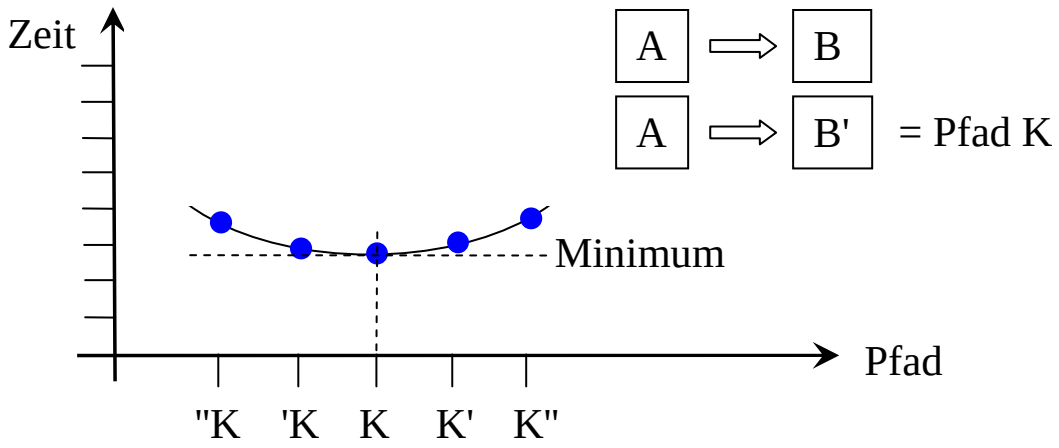


Es mag auf dem ersten Blick etwas banal anmuten, wenn man über diese Methode zu dem Schluss kommen möchte, dass der geradlinige Pfad K das zeitliche Minimum besitzt und dieses der Verlauf ist, den das Licht nehmen würde. Denn wir wissen ja, dass der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten stets mit der Konstruktion einer Geraden durch diese beiden Punkte gleichzusetzen ist. Aber das liegt daran, weil wir dieses Prinzip auf den einfachsten Fall anwenden. Wir werden sehen, dass mit den kommenden Fällen die Behandlung des Themas immer mehr komplexer wird. Jedoch am Anfang steht stets dasselbe einfache Prinzip nach dem Weg der kürzesten Zeit zu suchen, den das Licht beim Durchqueren verschiedenster Materialien bzw. Dichten nimmt.

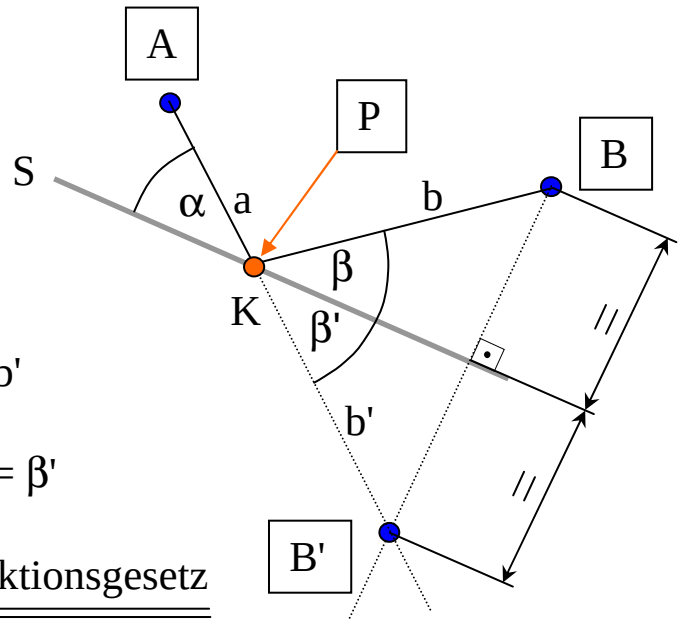
2.1 Die Reflektion des Lichtes von A nach B:

Gehen wir daher zum nächsten Fallbeispiel, nämlich zu dem Problem der Reflektion und welche Gesetzmäßigkeit dahinter steckt. Wir haben wieder die beiden Punkte A und B, die sich auf der einen Seite eines Spiegels S befinden. Nun soll der Pfad gefunden werden, welcher die kürzeste Zeit von A nach B nimmt. Ausgenommen ist jetzt der direkte Weg, der durch eine Wand versperrt wird.





Wir betrachten erneut 5 unterschiedlich Pfade, die von A aus auf einen bestimmten Punkt der Spiegellinie S treffen und dann von dort aus nach B verlaufen. Trägt man wiederum für jeden Pfad die benötigte Zeit in einem Diagramm auf, dann resultiert beim Pfad K der Weg, welcher als der kürzeste aufzufassen ist, also das zeitliche Minimum erfordert.
Was ist nun die Eigenschaft dieses Pfades K bzw. welche Gesetzmäßigkeit erschließt sich nun uns aus dieser Skizze? In diesem Fall erweist sich eine Hilfskonstruktion als sehr nützlich. Vom Punkt B aus wird ein Lot senkrecht auf die Spiegellinie S gefällt. Diese Strecke bis zum Spiegel wird verdoppelt und bildet auf der Rückseite des Spiegels den Punkt B'. Nun ist die Strecke, die der Pfad K vom Spiegel (Punkt P) aus nach B nimmt genauso lang wie die Strecke, die vom Spiegel aus zum Punkt B' verläuft. Dieses geht aus der geometrischen Konstruktion hervor, die ein gleichschenkliges Dreieck BB'P bildet, dessen Symmetrieachse die Spiegellinie S ist.



$a + b = a + b'$
somit ist:
$b = b'$ und $\beta = \beta'$
sowie:
$\alpha = \beta$: Reflektionsgesetz

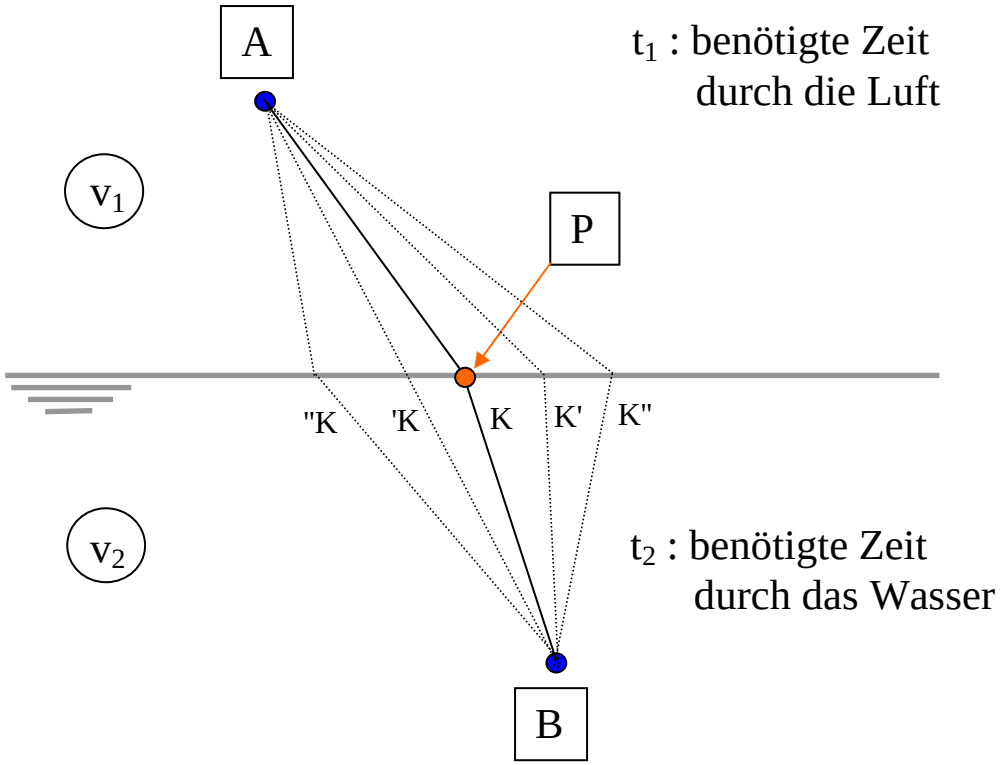
Aus der Geometrie kennen wir den Lehrsatz, dass die gegenüberliegenden Scheitelwinkel α und β' gleich groß sein müssen. Da wiederum $\beta' = \beta$ sein muss, erhalten wir hier das bekannte Reflektionsgesetz $\alpha = \beta$ aus der geometrischen Optik. Der Einfallswinkel ist gleich groß dem Ausfallswinkel.
Und dieses wäre nun die erste interessante Erkenntnis, die wir aus dem Prinzip von Fermat hergeleitet haben, dass die Reflektion von einem Punkt A nach B über den Reflexionspunkt P mit dem kürzesten Weg einhergeht, was wiederum der minimalen Zeitspanne von A nach B entspricht.

Wir können also die Aussage treffen, dass das Reflektionsgesetz der Optik eine Eigenschaft ist, die sich aus dem Prinzip der kürzesten Zeit erklärt. Und dieser Aussage muss man sich erst einmal bewusst werden, dass nämlich das Licht einem besonderen Prinzip gehorcht und aus einer unendlichen Anzahl von möglichen Wegen uns den Pfad beobachten lässt, der gleichfalls der einfachen Aussage des Reflexionsgesetzes folgt.
Während bei diesem Beispiel das "Prinzip von Fermat" anfänglich von einer Abhängigkeit der Ortslagen der Punkte A und B ausgeht, stoßen wir mit diesem Ergebnis (Reflektionsgesetz) schlussendlich auf eine Gesetzmäßigkeit, welches allgemeiner Art ist und die Winkellage (α ; β) dieser Punkte zueinander beschreibt.

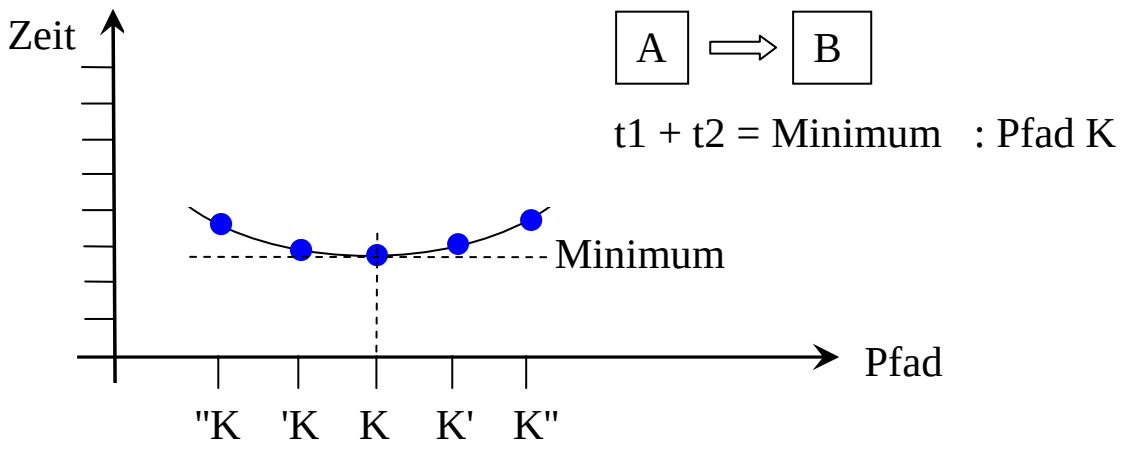
2.2 Die Brechung des Lichtes von A nach B:

Unter der Brechung des Lichtes versteht man die Eigenschaft, dass Licht beim Durchdringen von verschiedenen Materialien oder auch verschiedenen dichten Zonen (Arealen) an den jeweiligen Grenzflächen einen anderen Richtungsverlauf nimmt. Diese Eigenschaft lässt sich am einfachsten damit verdeutlichen, dass das Licht in den unterschiedlich dichten Zonen eine verschieden große Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt. Diese materialabhängigen Brüche in der Geschwindigkeit machen sich dann als Richtungsänderungen bemerkbar.

Als Ausgangsbeispiel nehmen wir wieder die Punkte A und B, wobei beide Punkte in unterschiedlichen Arealen liegen. Als Problemstellung haben wir also nichts anderes als den Weg zu suchen, der von A nach B in der geringsten Zeit bewältigt werden kann. Und jetzt wird schnell offenkundig, dass es nicht mehr der geradlinig direkte Weg von A nach B sein kann, der diese Eigenschaft besitzt. Denn das traf ja nur für den speziellen Fall zu, als die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 identisch groß waren. Nehmen wir an, dass v_1 größer als v_2 ist (siehe Skizze), wenn beispielsweise das Licht von A aus einen Raum mit Luft durchquert und dann am Punkt P auf eine Wasserfläche trifft. Dann wird sich ein günstigerer Pfad damit ergeben, wenn eine etwas längere Strecke durch die Luft in Kauf genommen wird auf Kosten einer kürzeren Wegstrecke durch das Wasser. Diesen günstigsten Pfad erhalten wir, indem wieder die benötigten Zeiten $t_1 + t_2$ in einem Diagramm aufgetragen werden.



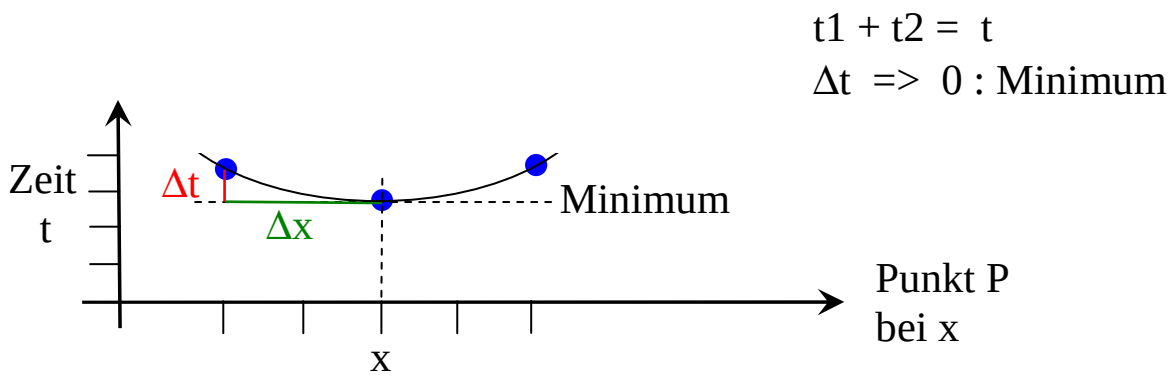
$v_1 > v_2$: Geschwindigkeiten des Lichts durch die verschiedenen Medien



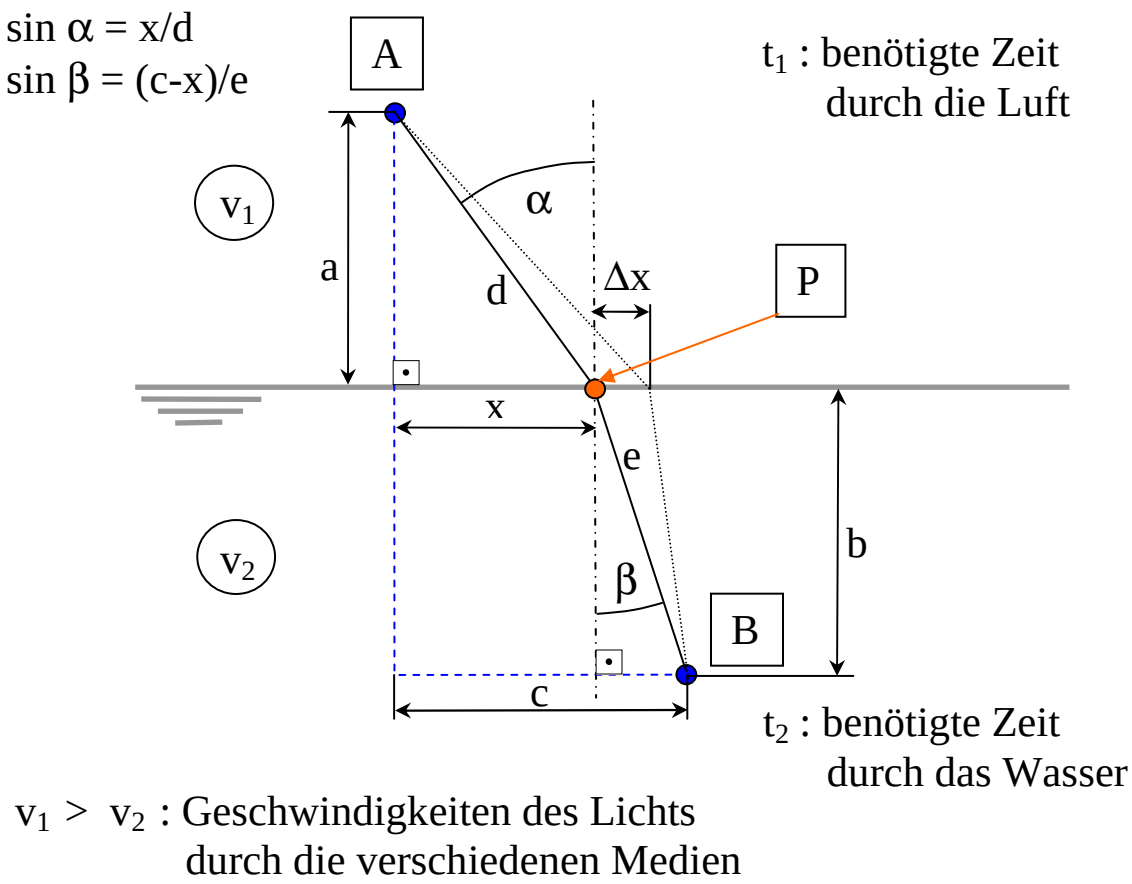
Das Minimum der Summe aus den Zeiten $t_1 + t_2$ ergibt sich mit dem Pfad K und es wird genau dieser Pfad sein, welcher von dem Licht genommen wird. Es steht also hiermit die Behauptung im Raume, dass die geforderte Einhaltung des "Prinzips der kürzesten Zeit" das Brechungsgesetz der Optik zu erklären vermag.
Es ist schon eine phänomenale Erkenntnis über das Wesen des Lichtes, welche sich mit dem Prinzip von Fermat eröffnet. Die Natur des Lichts zeigt sich wieder sehr "sparsam" indem es genau den Weg nimmt, der am schnellsten ist.

Die Brechung des Lichtes verhält sich damit wie die oft zitierte Beispielgeschichte von der "Rettungsaktion eines Ertrinkenden". Es ist ein sehr schönes und anschauliches Beispiel, da sie sehr real und auch gut nachempfunden werden kann. Man stelle sich also vor, man würde mit seinem Hund am Meer spazieren gehen. Der Hund würde sich sodann irgendwann ins Wasser begeben und einige Meter hinausschwimmen bis er am Punkt B angelangt ist, während ich mich als Hundebesitzer am Punkt A befinde. Plötzlich bekommt der Hund Krämpfe und droht zu ertrinken. In dieser Situation würde ich als Herrchen oder Frauchen schnellstmöglich meinen treuen Freund retten wollen und würde rein intuitiv einen ähnlichen Weg einschlagen wie es das Licht von Natur aus nimmt. Denn laufe ich direkt und schnell zum Ufer (Pfad "K), dann verschenke ich zuviel Zeit im Wasser. Laufe ich dagegen bis zum Uferpunkt K', dann habe ich zwar die geringste Distanz im Wasser zurückzulegen, aber muss einen übermäßig langen Weg am Strand entlang laufen, der mich wiederum zuviel an Zeit kosten würde. Der Weg irgendwo dazwischen ist der optimale und zeichnet sich mit dem Pfad K aus.

Im Folgenden soll nun auch die Behauptung noch untermauert werden, dass es sich hierbei wirklich um das Brechungsgesetz der Optik handelt, welches sich über das Fermatsche Prinzip ergeben hat.
Hierzu wenden wir die Methode an, die uns anzeigt, wann ein Minimum oder Maximum bei einer mathematischen Kurve vorliegt. Wie im folgenden Bild skizziert können wir an einem Kurvenstück eine kleine Änderung Δx (Wegänderung des Punktes P) vornehmen, womit sich eine entsprechend kleine Änderung Δt ergibt. Je näher man an den Punkt mit dem Minimum kommt, desto kleiner werden die Zeitdifferenzen Δt. Mathematisch lässt man nun das Δt gegen Null streben und erhält dann als Grenzwert den Punkt P mit dem optimalen "Pfad der kürzesten Zeit".



Die Abhängigkeiten der Zeitdifferenzen aus den Wegdifferenzen erhalten wir mit der nächsten Skizze. Dort lassen sich die Wegstrecken von A nach P und P nach B durch das Anwenden des Satzes von Pythagoras berechnen.



Die Zeiten entlang des Pfades sind:

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \qquad t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

Welche Zeiten ergeben sich mit der Verschiebung des Punktes P um Δx?

$$t_1 + \Delta t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + (x + \Delta x)^2}}{v_1} \qquad t_2 + \Delta t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (c - x - \Delta x)^2}}{v_2}$$

Wir lassen den Term Δx nun gegen Null streben, dann gelten folgende Näherungsformeln:

$$(x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x$$
$$(c - x - \Delta x)^2 \approx (c - x)^2 - 2 \cdot (c - x) \cdot \Delta x$$

Somit erhalten wir nun in Näherung:

$$t_1 + \Delta t_1 \approx \frac{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right) + 2 \cdot x \cdot \Delta x}}{v_1} \qquad t_2 + \Delta t_2 \approx \frac{\sqrt{\left(b^2 + (c - x)^2\right) - 2 \cdot (c - x) \cdot \Delta x}}{v_2}$$

Nun gelten aber auch für Wurzelausdrücke Näherungsformeln, wenn in diesen ein unendlich kleiner Wert auftaucht wie z.B. *2 x Δ x* oder *2 (c-x) Δ x*.

$$\sqrt{Z + \Delta s} \approx \sqrt{Z} \cdot \left(1 + \frac{\Delta s}{2Z}\right) \qquad \sqrt{Z - \Delta s} \approx \sqrt{Z} \cdot \left(1 - \frac{\Delta s}{2Z}\right)$$

Dieses lässt sich nun auch auf $t_1+\Delta t_1$ und $t_2+\Delta t_2$ anwenden:

$$t_1 + \Delta t_1 \approx \frac{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)}}{v_1} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \Delta x \cdot x}{2 \cdot \left(a^2 + x^2\right)}\right) = \frac{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)}}{v_1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x \cdot x}{\left(a^2 + x^2\right)}\right)$$

$$t_2 + \Delta t_2 \approx \frac{\sqrt{\left(b^2 + (c - x)^2\right)}}{v_2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \Delta x \cdot (c - x)}{2 \cdot \left(b^2 + (c - x)^2\right)}\right) = \frac{\sqrt{\left(b^2 + (c - x)^2\right)}}{v_2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta x \cdot (c - x)}{\left(b^2 + (c - x)^2\right)}\right)$$

Jetzt sind wir an dem Punkt, da wir die Zeitdifferenzen uns errechnen können:

$$\left(t_1 + \Delta t_1\right) + \left(t_2 + \Delta t_2\right) - \left(t_1 + t_2\right) = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$$

$$\rightarrow \Delta t \approx \frac{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)}}{v_1} \cdot \left(\frac{\Delta x \cdot x}{\left(a^2 + x^2\right)}\right) - \frac{\sqrt{\left(b^2 + (c - x)^2\right)}}{v_2} \cdot \left(\frac{\Delta x \cdot (c - x)}{\left(b^2 + (c - x)^2\right)}\right)$$
$$\rightarrow \Delta t \approx \frac{\Delta x}{v_1} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)}}\right) - \frac{\Delta x}{v_2} \cdot \left(\frac{(c - x)}{\sqrt{\left(b^2 + (c - x)^2\right)}}\right)$$

Nun entsprechen die Klammerausdrücke hier den Verhältnissen der Gegenkatheten zu den Hypotenusen bei den rechtwinkligen Dreiecken mit den Winkeln α und β, und dieses sind dann somit laut Definition die Sinusausdrücke zu jenen Winkeln α und β.

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{v_1} \cdot (\sin\alpha) - \frac{\Delta x}{v_2} \cdot (\sin\beta) \qquad \rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} \approx \frac{(\sin\alpha)}{v_1} - \frac{(\sin\beta)}{v_2}$$

Mit der Forderung, dass $\Delta t/\Delta x$ als Verhältnis gegen Null streben soll (beim Minimum), resultiert jetzt der Ausdruck:

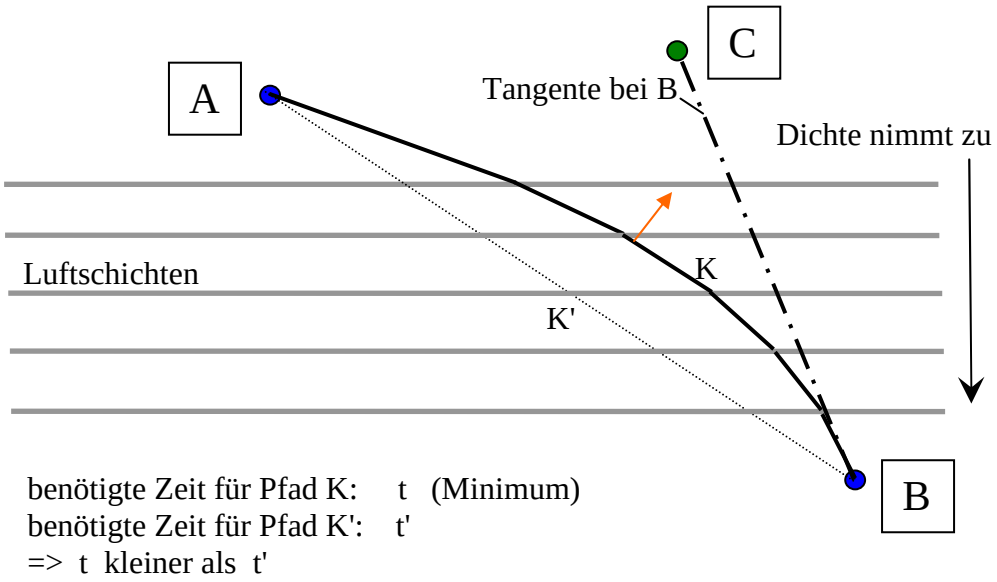
$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow \frac{dt}{dx} \rightarrow 0: \qquad \rightarrow 0 = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2}$$

$$\rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad : \textit{Brechungsgesetz}$$

Und hier sind wir nun endlich bei dem Brechungsgesetz nach Snellius, welches besagt, dass die Sinus der beiden Winkel α und β sich so verhalten wie die Geschwindigkeiten des Lichts durch die beiden Medien v_1 und v_2.

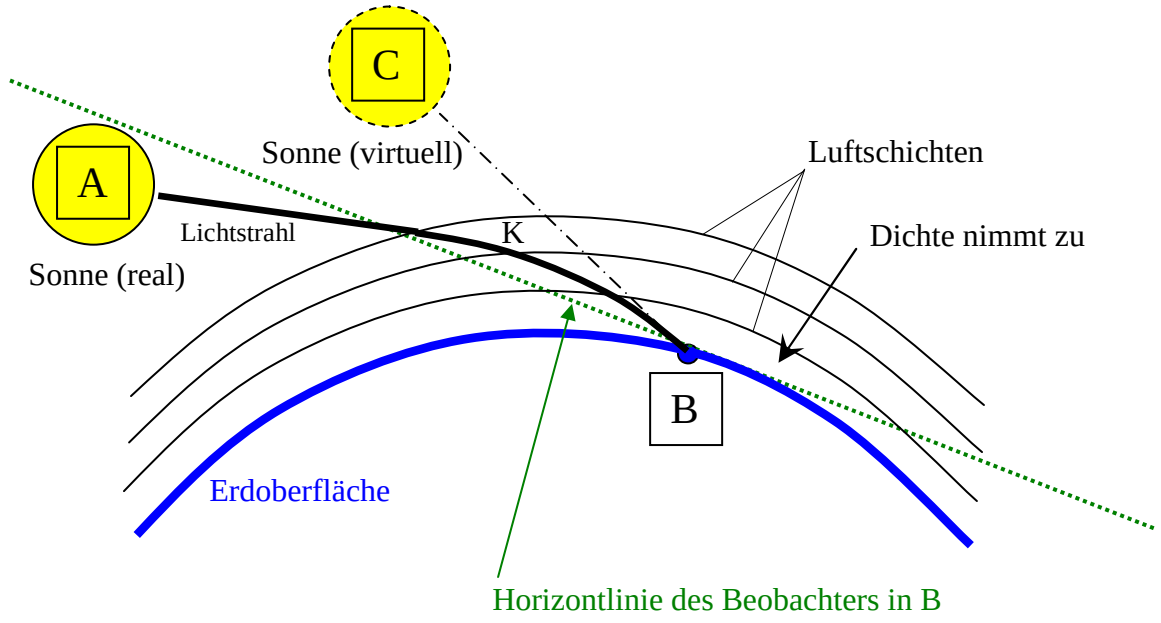
2.3 Bewegung des Lichtes durch Schichten mit kontinuierlichen Dichteunterschieden:

Das Brechungsgesetz zeigt uns, in welcher Art und Weise sich das Licht verhält, wenn es eine Grenzschicht zu einem Medium mit höherer oder niedriger Dichte passiert. Die Brechung erfolgt so, dass das Licht im dichteren Medium zur senkrechten Linie (bezogen auf die Grenzfläche) hin verläuft. Im umgekehrten Fall wird der Lichtstrahl von der senkrechten Linie weggebrochen. Wie sieht es nun aber aus, wenn das Licht z.B. Luftmassen durchquert, die sich permanent von ihrer Dichte her ändern? Dieses ist nämlich der typische Fall, wenn beispielsweise die Sonnenstrahlen die Luftschichten der Atmosphäre durchlaufen. In den oberen Schichten ist die Luft sehr dünn und nimmt dann stetig zu. Die größte Dichte ist in der Regel erreicht, wenn das Licht dann bei uns Beobachtern eintrifft, also auf der Erdoberfläche. Um sich qualitativ zu veranschaulichen, wie der wirkliche Verlauf sein müsste, benötigen wir nur ein paar Schichten, die näher betrachtet werden.

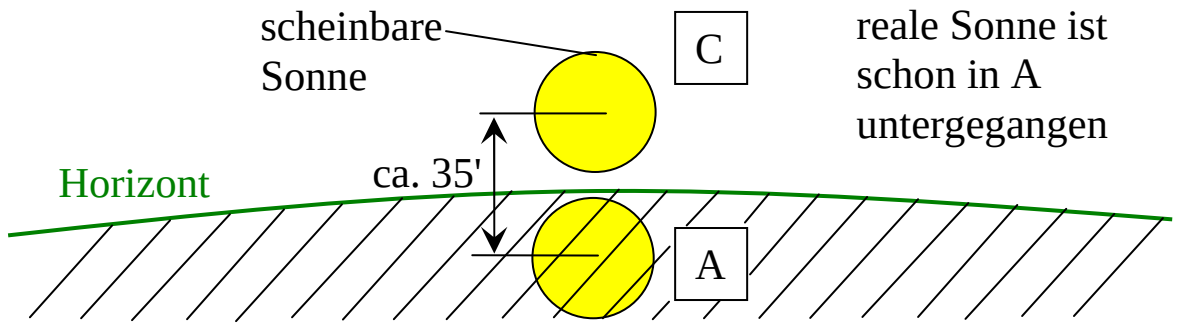


Der Weg der kürzesten Zeit wird sich durch den Kurvenverlauf K zeigen. Der geradlinige Weg entlang der Strecke K' benötigt eine längere Zeit und wird damit nicht der Verlauf sein, welcher in der Realität zu beobachten sein wird. Ein Beobachter im Punkt B würde also einen Lichtstrahl sehen, dessen Vorgeschichte entlang einer gekrümmten Bahn K verlief. Da der Beobachter aber nur die Richtung der Tangente beim Eintreffen des Lichtstrahl wahrnehmen kann bzw. den Lichteintritt nur auf diese Weise interpretieren wird, erscheint es ihm, als würde das Licht vom virtuellen Punkt C aus kommen. Diese Täuschung erleben wir tagtäglich, wenn wir z.B. die Sonne beim Untergang am Horizont verfolgen. Denn obwohl sich die Sonne schon knapp unterhalb des Horizontes befindet, demnach theoretisch nicht mehr für uns sichtbar sein dürfte, erscheint sie uns trotzdem so, als würde sie noch knapp über dem Horizont stehen.

Als Merksatz für den Verlauf des Lichtes kann man daher folgende Beschreibung nehmen: *Die Kurve K beult sich in die Richtung konvex nach außen (siehe roten Pfeil der vorherigen Skizze) wo die geringere Dichte vorhanden ist.* - Dieser Merksatz gilt natürlich nur dann, wenn die Dichte in eine Richtung abnimmt/zunimmt und nicht inhomogenen Wechseln unterliegt!



Skizze zum Sonnenuntergang: Obwohl die Sonne scheinbar (virtuell) noch über dem Horizont steht, ist sie in Wirklichkeit schon längst am Horizont untergegangen. Der Winkelabstand ist am Horizont etwa 35 Winkelminuten, daher sogar etwas größer als die Sonnenscheibe, die nur einen Durchmesser von etwa 32 Winkelminuten besitzt.



2.3.1 Grüner Strahl (Green Flash):

Mit der vorangegangenen Erklärung, in welcher Weise einfarbiges bzw. monochromatisches Licht Luftschichten unterschiedlicher Dichte durchläuft, sind wir nun einen Schritt näher gekommen, um Konsequenzen für das Sonnenlicht abzuleiten. Denn das sichtbare Licht der Sonne besitzt ein Spektrum an Lichtfrequenzen, die für den Menschen innerhalb der Grenzen von Infrarot (langwelliges Rot) bis zum Ultraviolett (kurzwelliges Violett) wahrgenommen werden können. Das entspricht den Wellenlängen von ca. 400 nm (violett) ... 750 nm (rot) bzw. den Frequenzen von ca. 750 THz (violett) ... 400 THz (rot).

| 750 Terahertz 400 Terahertz |

| 400 Nanometer 750 Nanometer |

Denn die Multiplikation der Frequenz mit der Wellenlänge ergibt die Geschwindigkeit des Lichtes (hier die theoretische Vakuumgeschwindigkeit).

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $\rightarrow v_0 = f \cdot \lambda$

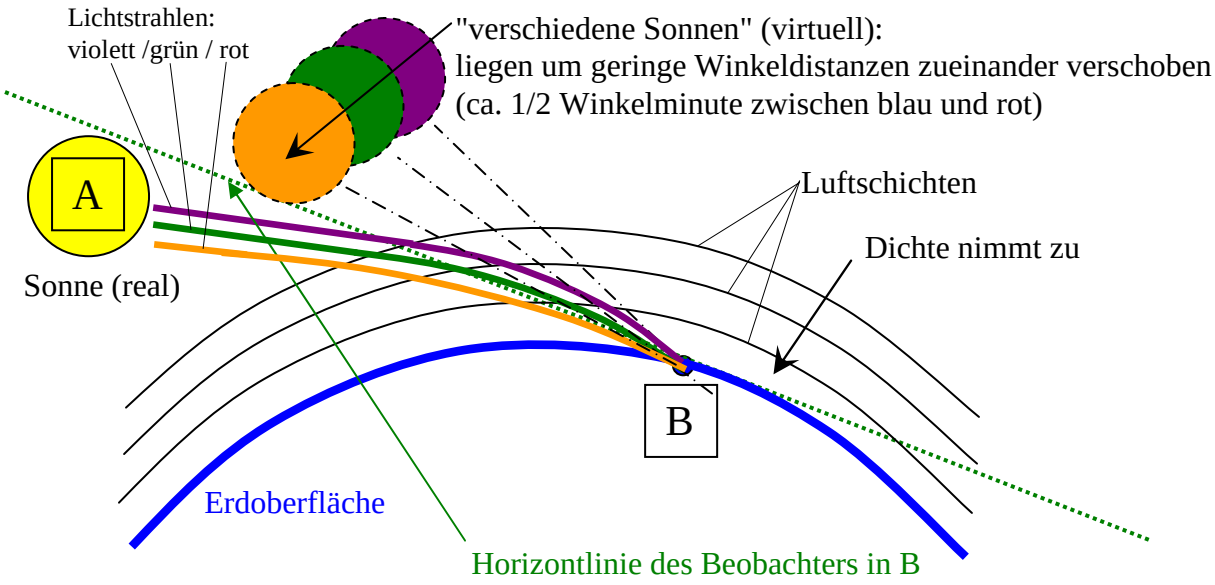
Am Beispiel des violetten Lichts ergibt das die ungefähre Vakuumlichtgeschwindigkeit von:

$$v_0 = 400 Nanometer \cdot 750 Terahertz = 400 \times 10^{-9} m \cdot 750 \times 10^{12} s^{-1} = 300 \times 10^6 \frac{m}{s}$$

Aus dem obigen Farbspektrum besteht das sichtbare "weiße" Licht unserer Sonne. Wenn sich Licht einer bestimmten Frequenz in einem Medium fortpflanzt, dann geschieht das ebenfalls mit einer bestimmten Geschwindigkeit. D.h., die Fortpflanzunggeschwindigkeit des Lichts ist frequenzabhängig und wird sich in einem Medium dergestalt äußern, dass ein entsprechender Brechungsindex für diese Frequenz gilt. Ein Lichtbündel, welches z.B. Luftschichten mit unterschiedlichen Dichten durchquert, wird für jede einzelne Frequenz einen "individuellen" Pfad wählen, der dem Prinzip der kürzesten Zeit gehorcht. Aus diesem Grund werden kurzwellige Frequenzen (wie z.B. das blauviolette Licht) stärker gebrochen als langwellige Frequenzen (wie z.B. das rote Licht). Als knappe Erklärung soll daher genügen, dass sich die verschiedenen Frequenzen die Lichtes als elektromagnetische Wellen beim Durchqueren eines Mediums unterschiedlich schnell fortpflanzen. Man muss in diesem Fall von der scheinbaren Lichtgeschwindigkeit sprechen, da sich eine "ungestörte" elektromagnetische Welle auch innerhalb eines Materials von A nach B mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c_0 = 2,998 x10^8 m/s ausbreitet. Nun gibt es im Material permanent Interaktionen zwischen den dort befindlichen Atomen und Molekülen (Elektronen, Protonen) und dem elektrischen Feld. Elektronen werden von Lichtwellen angeregt (Elektron absorbiert z.B. ein Photon bzw. Lichtquant) können aber auch wieder auf einen energetisch niedrigeren Zustand zurückfallen (Elektron sendet z.B. ein Photon bzw. Lichtquant aus). Infolge der Wechselwirkung der elektromagnetischen Welle innerhalb des Mediums kommt es dazu, dass die Elektronen bewegt werden, wobei die angeregten Materieteilchen dann wieder zeitlich verzögerte Elementarwellen abstrahlen. Die Gesamtheit aller dieser Wirkprozesse in einem Medium führt quasi zu einer vergleichbar zeitlichen Verzögerung beim sich durch das Material bewegenden Licht, was sich in Form einer kleineren Geschwindigkeit zeigt. Da violettes Licht stärker gebrochen wird, steht dieses im Zusammenhang mit einer scheinbar niedrigeren

Lichtgeschwindigkeit, genauer gesagt Phasengeschwindigkeit, wenn wir hier einmal das langwellige rote Licht als Vergleich gegenüberstellen. Was sich nicht ändert ist die Frequenz des Lichtes beim Durchqueren des Mediums.

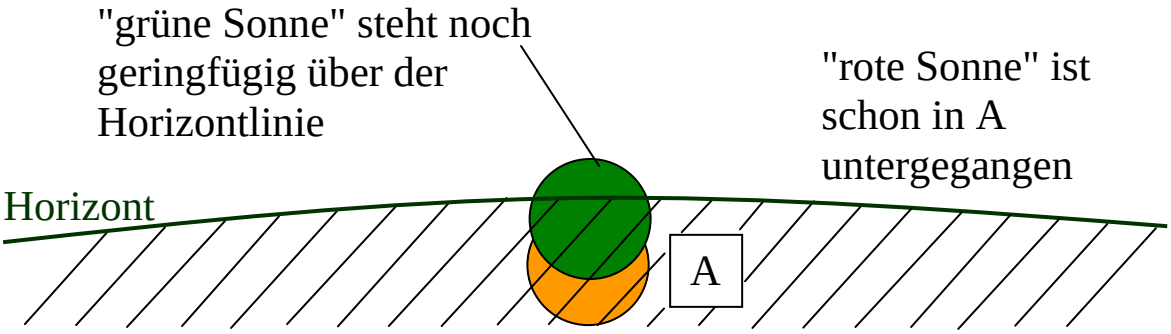
Was bedeutet das nun für unsere Sonnenstrahlen, die sich beim Sonnenuntergang durch die verschiedenen Luftschichten zu uns hindurcharbeiten? Wenn sich also die verschiedenen Frequenzen mit ihren unterschiedlichen Brechzahlen von Luftschicht zu Luftschicht bewegen, dann werden diese Lichtstrahlen unterschiedlich stark gekrümmt. Das macht sich dann auf diese Art bemerkbar, dass die Sonnenscheibe nicht mehr einheitlich als eine "weiße" Lichtfläche erscheint, sondern es mehrere Lichtscheiben mit verschiedenen Frequenzen (Farben des Spektrums) gibt, die um ganz geringere Winkeldistanzen zueinander verschoben liegen.



Die sogenannte Dispersion (Zerlegung) des Lichtes in mehrere Frequenzen zeigt sich beispielsweise beim Lichtdurchtritt durch die Atmosphäre verstärkt, wenn die Sonne schon sehr tief steht wie beim Sonnenuntergang. Da die Sonneneinstrahlung normalerweise zu hell ist, kann der Beobachter diese Farbauffächerung mit bloßem Auge nicht erkennen. Denn wie wir im vorherigen Kapitel erfahren haben, liegt die Winkeldifferenz zwischen realer und scheinbarer Sonne bei etwa 35 Winkelminuten (0,583 Winkelgrad). Die Winkeldistanzen der verschieden farbigen Sonnenscheiben untereinander sind wiederum um ein Vielfaches kleiner als die Winkelabweichung zwischen der sichtbar virtuellen und der real untergegangenen Sonne. Zwischen der roten und blau-violetten Sonne liegt die Winkeldistanz im Bereich einer halben Winkelminute, zwischen der roten und grünen Sonne siedelt sich der ungefähre Wert nur noch bei einem Viertel einer Winkelminute an. **#1)**
Daher hat der Beobachter allein schon zeitlich gesehen nur sehr geringe Möglichkeiten, Zeuge eines solchen Schauspiels zu werden, da dieses seltene Phänomen im Höchstfall wenige Sekunden sichtbar ist, meist jedoch nur noch als final ausgesandtes grünes Leuchten für einen kurzen Augenblick zu beobachten ist. Dieses Schauspiel ist auch deswegen selten, da als Randbedingung eine sehr saubere und klare Luft in der Atmosphäre vorliegen muss. Diese Bedingungen liegen eigentlich nur noch auf dem Meer oder in den Bergen vor, aber auch in den arktischen Gebieten ist der "Green flash" noch zu beobachten. Es gibt sogar Fotografien eines "Blue flash", die in der Region des Südpols aufgenommen wurden.

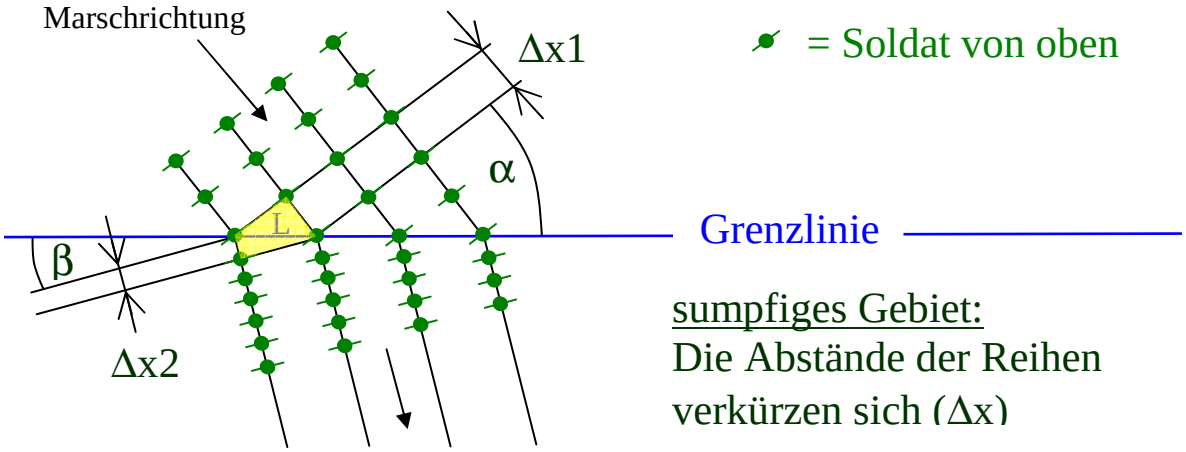
#1) weitere Details zu der Refraktionsgleichung der Atmosphäre werden im Kapitel 4 behandelt

Denn je sauberer die Luftschichten sind, welche das Licht passiert, desto weniger wird dieses gestreut. Rotes Licht wird als langwellige Frequenz weniger gestreut als grünes Licht und dieses wiederum weniger als das blaue Licht. Daher ist der Normalfall, dass die Frequenzen für das grüne und blaue Licht beim Sonnenuntergang schlichtweg schon weggefiltert werden, ehe sie beim Beobachter eintreffen können. Es verbleibt das bekannte tiefrot glühende Licht der untergehenden Sonnenscheibe am Horizont.

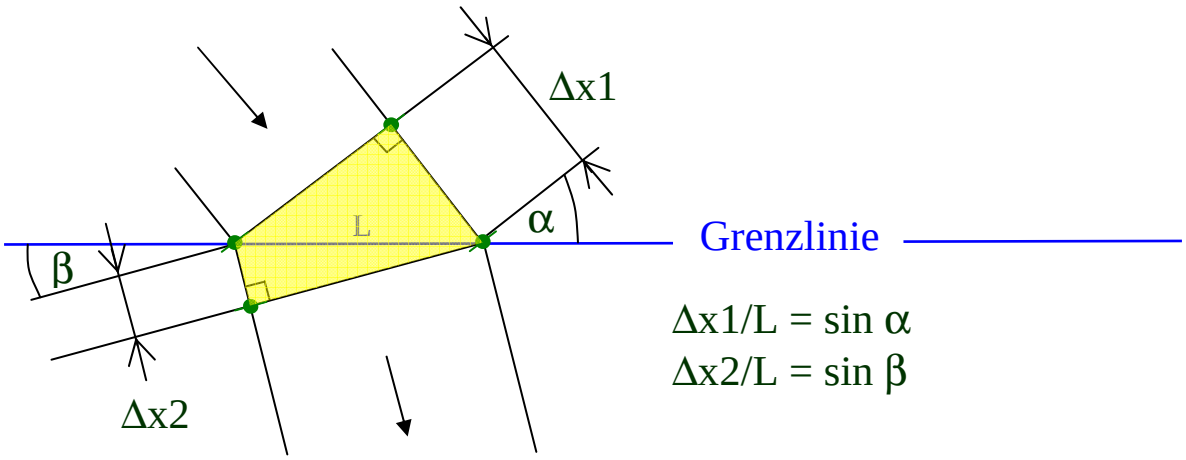


Das seltene Phänomen eines "Green flash": Kurz nachdem die rote Sonnenscheibe am Horizont untergegangen ist, kann es zu einem Aufleuchten des Randes der um eine geringe Winkeldistanz verschobenen grünen Sonnenscheibe kommen.

Der "Grüne Strahl" ist also ein Ergebnis der unterschiedlichen Brechungseigenschaften der verschiedenen Lichtfrequenzen. Das Thema der Lichtbrechung wurde anfänglich im Kapitel 2.2 durch das Prinzip von Fermat anschaulich behandelt. An dieser Stelle möchte ich aber noch die überwiegend gängigere Erklärung des Brechungsgesetzes anführen, so wie sie in den meisten Schulbüchern zur Darstellung kommt.
Wieder wird als Ausgangspunkt eine Lichtquelle mit monochromatischem Licht (nur eine bestimmte Frequenz) vorausgesetzt. Dieser Lichtstrahl trifft in einem bestimmten Winkel auf ein dichteres Medium und pflanzt sich von dort aus mit einer geringeren Geschwindigkeit fort. Die Wellenfronten des Lichts bleiben dabei stets parallel, auch nachdem das Licht in das dichtere Medium getreten ist. Man kann sich die Situation ähnlich so vorstellen, als würde eine Kompanie von Soldaten im Gleichschritt laufen und dann plötzlich in ein sumpfiges Gelände eintreten. Sobald dieses unwegsame Gebiet erreicht wird, werden die Soldaten langsamer werden und zwangsläufig in engeren Reihen voranschreiten (entspricht beim Licht der geringeren Distanzen der Wellenfronten).



Anhand der vorangegangenen Skizze wird nun folgendes Detail mit den Winkelfunktionen in Beziehung gebracht:



$$\sin\alpha = \frac{\Delta x1}{L} \qquad \sin\beta = \frac{\Delta x2}{L} \qquad \rightarrow \frac{\Delta x1}{\sin\alpha} = \frac{\Delta x2}{\sin\beta}$$

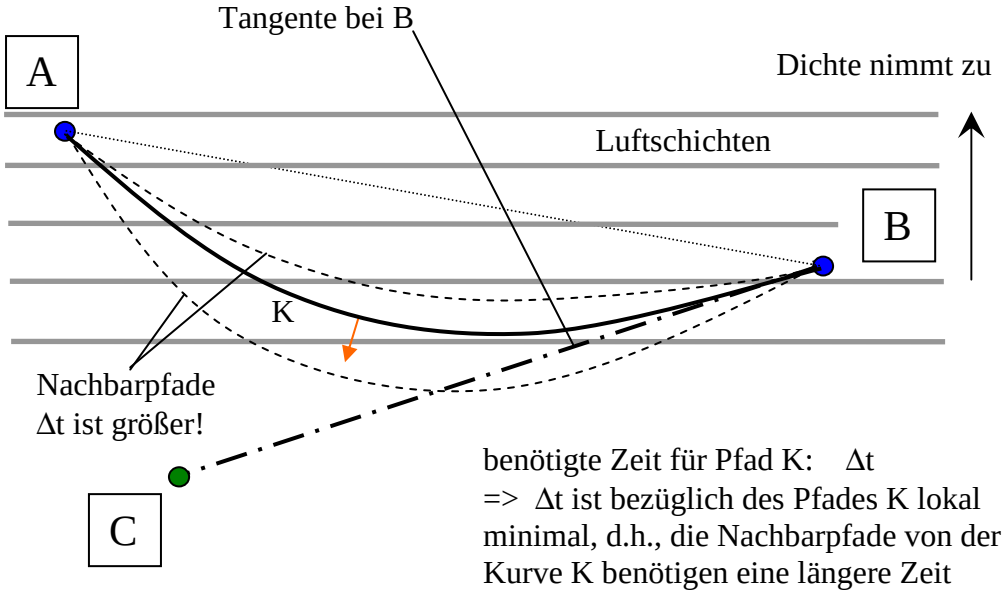
Da sich die Wegdifferenzen Δx1 und Δx2 sich genau so verhalten wie die Geschwindigkeiten in Pfeilrichtung, kann man statt Δx1 = v1 und Δx2 = v2 schreiben und kommt damit letztendlich wieder auf das Brechungsgesetz von Snellius.

$$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta} \qquad \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad : \textit{Brechungsgesetz}$$

2.3.2 Die Luftspiegelung auf heißen Oberflächen:

Gerade in den heißen Sommermonaten kommt es sehr oft vor, dass auf den asphaltierten Straßen die Oberfläche eine weitaus höhere Temperatur besitzt als die Luft. Direkt oberhalb des Asphalts wird sich daher die Luft entsprechend mehr erwärmen als in den höheren Luftschichten. Da wärmere Luft eine geringere Dichte besitzt als kühlere, nimmt die Dichte mit der Höhe zu. Wir haben jetzt genau den umgekehrten Fall des Dichteverlaufs, welchen wir beim Eintritt des Sonnenlichts in die Atmosphäre vorausgesetzt hatten. Insofern ist der Dichtegradient in die Gegenrichtung weisend, womit sich der Lichtstrahl nun gemäß der Devise " ... *beult sich in die Richtung konvex nach außen, wo die geringere Dichte vorhanden ist*" in die andere Richtung biegen wird.

Liegen also derartige Randbedingungen vor, dann kann folgendes Phänomen beobachtet werden, dass nämlich auf dem heißen Belag der Straße eine hellblaue Fläche sichtbar wird oder auch ein Objekt dort umgekehrt als Spiegelung in Erscheinung tritt. Wie wir gleich sehen werden, handelt es sich bei den hellblauen Flächen, die ähnlich wie kleine Seen oder Wasserflächen aussehen, um die Reflektion des tagblauen Himmels. Zum einen kann sich das blaue Licht von einem Punkt A aus direkt zu uns als Beobachter bewegen, aber gemäß dem Prinzip der kürzesten Zeit versucht das Licht auch einen Pfad zu wählen, der entlang einer gekrümmten Bahn in Form einer Reflexion zu uns kommt.

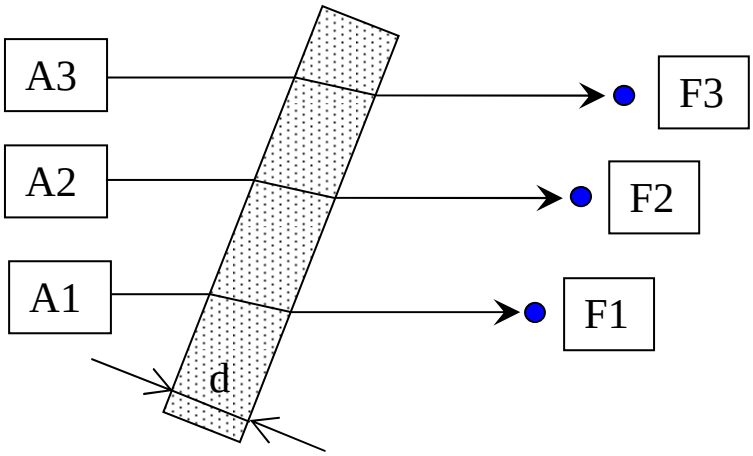


Der Beobachter in B kann also einmal das Objekt direkt beobachten, wenn die Blickrichtung nach A verläuft, aber auch das Spiegelbild entlang der Tangente (von Pfad K) in Richtung C wahrnehmen. Ist in A der blaue Himmel zu erkennen, dann sieht der Beobachter in B blaue Flächen, wenn sein Blick zum Boden hin geneigt ist. Handelt es sich bei A um ein Objekt, wie z.B. ein Auto oder ein ferngelegener Berg, dann sieht man ein gleichfalls gespiegeltes Bild von diesem Objekt. Ein Baum könnte in diesem Fall so aussehen, als würde er oben und unten eine Baumkrone besitzen, da beide Bilder in der Regel miteinander verschmelzen. In diesem Fall kreuzen sich die verschiedenen Objektstrahlen unterwegs und verdrehen das Bild. Aber auch umgekehrt können zwei aufrechte Bilder miteinander verschmelzen, wenn die Strahlen sich nicht kreuzen. Diese Art der Spiegelung an den Grenzflächen von Luftschichten ist auch unter dem Namen "Fata Morgana" bekannt.

Luftspiegelung des blauen Himmels auf dem Straßenasphalt in der Nähe vom Horizont (aufgenommen im Kalbarri Nationalpark / Australien)

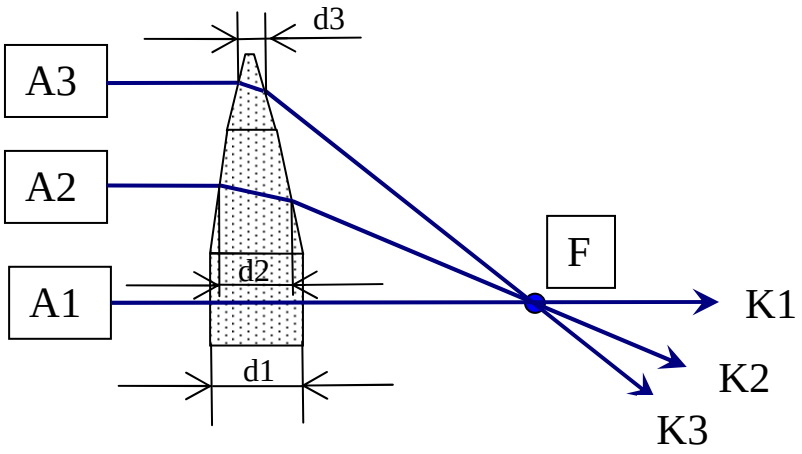
2.3.3 Die Fokussierung des Lichts bzw. "Methode der Gleichzeitigkeit":

Mit dem "Prinzip der kürzesten Zeit" haben wir mittlerweile ein Werkzeug, um die Gesetze für die Lichtbrechung, die Reflexion, die Dispersion und die Luftspiegelung zu erklären. Ein weiterer Schritt hin zu einer höheren Komplexität wäre nun, wenn man nicht nur ein Lichtstrahl betrachtet, der von einer Quelle A kommt und nach B geht, sondern von vielen Quellen ausgeht (z.B. die Parallelstrahlen der Sonne), welche alle in einem Brennpunkt F verlaufen sollen.
Damit so etwas nach optimalen Regeln geschehen kann, müsste bezüglich der Quelle und des Brennpunktes ein optisches Medium in Aktion treten, welches sämtliche Strahlengänge so beeinflusst, dass diese einen Punkt kreuzen. Würde man nur einen einzigen Lichtstrahl herausgreifen, dann gilt natürlich das Prinzip von Fermat mit der kürzesten Zeit zwischen Quelle A und Brennpunkt F. Wird dieses Prinzip jedoch auf sämtliche Strahlquellen erweitert, dann stellt sich hier die Forderung nach der Gleichzeitigkeit für alle Strahlengänge. Dieses neue Prinzip bzw. die "Methode der Gleichzeitigkeit" soll nun im Folgenden behandelt werden. Wir werden sehen, dass sich mit dieser Methode viele optische Systeme ableiten lassen, die uns aus dem Alltag bekannt sind.
Beginnen wir aber erst einmal mit der planparallelen Brechung an einer Scheibe mit der konstanten Dicke d (z.B. eine Fensterscheibe). Wie man sieht, werden alle Parallelstrahlen von A1, A2 und A3 ausgehend ebenfalls parallel gebrochen, wenn sie ins Material eintreten. Aber auch beim Austritt aus dem Material verlaufen die Strahlen wieder parallel zueinander. Sie haben also keinen gemeinsamen Brennpunkt F. Die Forderung muss daher lauten, dass die Pfade alle in der selben Zeit in dem Brennpunkt F ankommen.



Strahlenverlauf bei der planparallelen Brechung. Es existiert kein gemeinsamer Brennpunkt.

Um dem endgültigen Ergebnis langsam näher zu kommen, stellen wir uns einfach mehrere konisch zulaufende Scheibendicken mit unterschiedlichen Dicken d1 ... d3 vor. Der Strahlengang von A1 aus soll dabei geradlinig vorausgesetzt werden. Die weiteren Strahlengänge von A2 und A3 aus (weiterhin parallel zu A1) haben nun eine Materialdicke zu durchlaufen, die bezogen auf einen gemeinsamen Brennpunkt dieselbe Zeit benötigen, so wie es die nachfolgende Skizze zeigt.

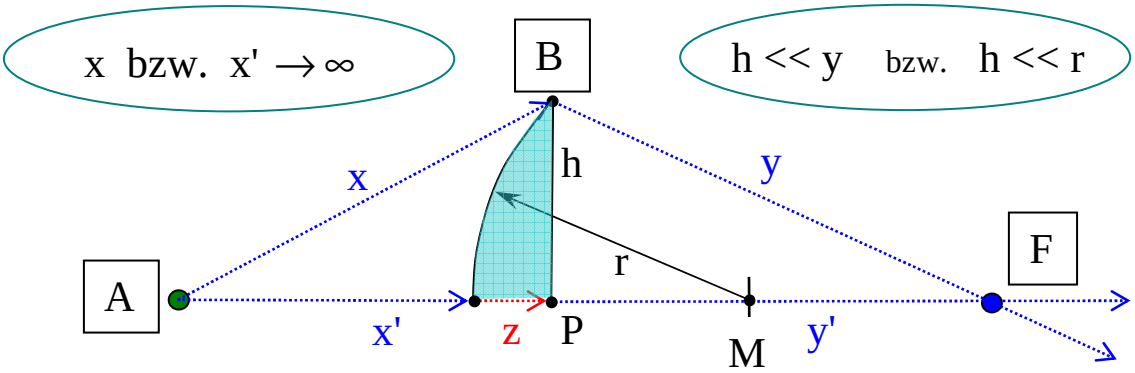


Wenn man sich die Pfade K1 ... K3 bis zum Brennpunkt F anschaut, dann ist zu erkennen, dass K1 den direkten geradlinigen Weg nimmt. Wir setzen voraus, dass sich das Licht innerhalb des optischen Materials langsamer bewegt. Da von der Quelle A2 aus der Pfad zum Brennpunkt F länger ist, muss diese Strecke zeitlich eingespart werden, indem die Wegstrecke durch das dichtere Material geringer ausfällt. Daher ist die Dicke d2 kleiner als d1. Für den noch weiter außen befindlichen Ausgangspunkt A3 gilt das entsprechend auch, sodass hier die Dicke d3 wiederum kleiner ausfällt als die schon reduzierte Materialdicke d2.
Bei richtig gewählter Dickenabnahme entsteht somit ein optisches Profil, welches für alle Pfade denselben Zeitaufwand bedeutet.

$$\sum t_i(K_1) = \sum t_i(K_2) = \sum t_i(K_3) \qquad \text{mit} \qquad \sum t_i = t_1 + t_2 + t_3$$

t1: benötigte Zeit von der Quelle A_i bis zum optischen Profil
t2: benötigte Zeit durch das optischen Profil
t3: benötigte Zeit vom optischen Profil bis zum Brennpunkt F

Das in der Skizze dargestellt Profil wäre somit noch eine sehr grobe Annäherung für die Forderung, dass die von links kommenden Parallelstrahlen sich im Punkt F treffen. Um die nächste Hürde zu nehmen, die uns ein passables Profil eines optischen Systems liefert, stellen wir uns nun die Situation vor, dass alle Strahlen von einem Quellenpunkt A aus starten. Diese Lichtstrahlen verlaufen sodann zu dem optischen Profil, durchqueren dieses und kreuzen dann alle den Brennpunkt F. Das optische Profil besitzt der Einfachheit halber einen konstanten Radius r auf der linken Seite. **#2)**

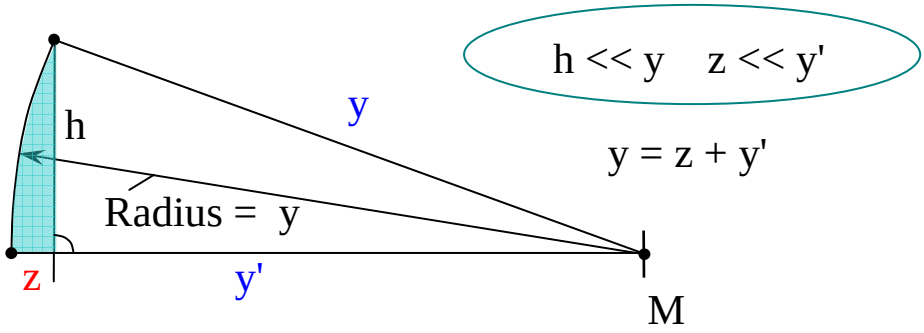


#2) eine genauere Ableitung der Formfunktion wird im Kapitel 4 dargestellt

Die Forderungen, die wir hier noch voranstellen wollen, sind:

- Der Quellenpunkt A soll unendlich weit entfernt sein, also x und x' $\rightarrow \infty$
- Die Höhe h soll gegenüber der Strecke y bzw. y' sehr klein sein.
- Die Höhe h soll gegenüber dem Radius r sehr klein sein.

Wenn diese geometrischen Forderungen vorliegen, dürfen wir auch folgende Vereinfachung an einem rechtwinkligen Dreieck nutzen, unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras:



$$h^2 + y'^2 = (z + y')^2$$
$$h^2 + y'^2 = z^2 + 2 \cdot z \cdot y' + y'^2$$

Der Term z^2 ist gegenüber den anderen Ausdrücken unwesentlich klein, sodass er vernachlässigt werden kann.

$$h^2 + y'^2 \approx 2 \cdot z \cdot y' + y'^2 \qquad \rightarrow h^2 \approx 2 \cdot z \cdot y' \qquad \rightarrow z \approx \frac{h^2}{2 \cdot y'}$$

In ähnlicher Weise gilt aber auch diese Näherung, weil y und y' sich relativ kaum voneinander unterscheiden:

$$y^2 - h^2 = y'^2 = (y - z)^2$$
$$y^2 - h^2 = y^2 - 2 \cdot z \cdot y + z^2$$
$$y^2 - h^2 \approx y^2 - 2 \cdot z \cdot y$$

$$\rightarrow h^2 \approx 2 \cdot z \cdot y \qquad \underline{\underline{\rightarrow z \approx \frac{h^2}{2 \cdot y}}}$$

Steht das y im Nenner, dann ist die Näherung für z eine geringe Spur kleiner als der wahre Wert, setzt man das y' in den Nenner, dann ist die Näherung geringfügig größer als der korrekte Wert.

Mit dieser Näherungsformel lässt sich nun eine Beziehung zwischen dem Radiusprofil des optischen Systems (entspricht einer Linsenform) und dem Abstand zum Brennpunkt F ableiten, der als so genannte Brennweite bezeichnet wird.
Es werden deshalb die einzelnen Zeiten aufaddiert und gegenübergestellt, die der direkte Pfad von A nach F benötigt und die der abgeknickte Pfad von A nach B nach F erfordert. Die Lichtgeschwindigkeit außerhalb der "Linsenform" soll dann c_L sein (Luft) und innerhalb des Materials (z.B. Glas) den Wert c_M annehmen.

$$t_1 = \frac{x}{c_L} \qquad t_2 = \frac{y}{c_L}$$: Zeiten von A nach B nach F

$$t'_1 = \frac{x'}{c_L} = t_1 - \frac{h^2}{2 \cdot x} \cdot \frac{1}{c_L} - \frac{h^2}{2 \cdot r} \cdot \frac{1}{c_L}$$

$$t'_2 = \frac{y'}{c_L} = t_2 - \frac{h^2}{2 \cdot y} \cdot \frac{1}{c_L}$$: Zeiten von A nach P nach F

$$t'_3 = \frac{z}{c_M} = \frac{h^2}{2 \cdot r} \cdot \frac{1}{c_M}$$

Die "Methode der Gleichzeitigkeit" setzt nun voraus, dass die Zeiten gleich sein müssen:

$$t_1 + t_2 = t'_1 + t'_2 + t'_3$$

$$t_1 + t_2 = \left(t_1 - \frac{h^2}{2 \cdot x} \cdot \frac{1}{c_L} - \frac{h^2}{2 \cdot r} \cdot \frac{1}{c_L} \right) + \left(t_2 - \frac{h^2}{2 \cdot y} \cdot \frac{1}{c_L} \right) + \left(\frac{h^2}{2 \cdot r} \cdot \frac{1}{c_M} \right)$$

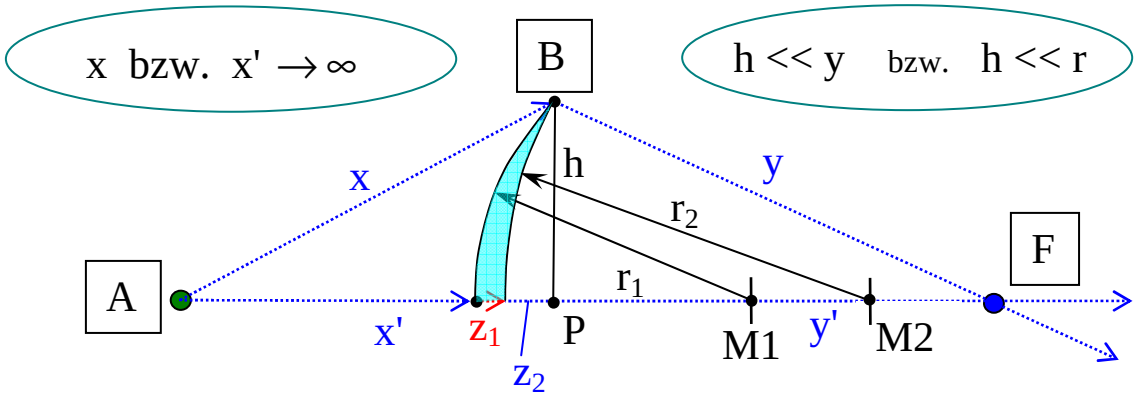
$$\rightarrow 0 = \frac{-h^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x \cdot c_L} + \frac{1}{r \cdot c_L} + \frac{1}{y \cdot c_L} - \frac{1}{r \cdot c_M} \right)$$

$$\rightarrow 0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{c_L}{c_M} - 1 \right) \qquad \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{c_L}{c_M} - 1 \right)$$

Gehen wir nun ergänzend davon aus, dass der Punkt A unendlich weit weg liegt (x läuft dann gegen Unendlich) und das Geschwindigkeitsverhältnis c_L/c_M durch einen Wert n ausgedrückt wird, dann erhält man die folgende Beziehung:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r} \cdot (n-1) \qquad \rightarrow y = \frac{r}{n-1} \approx y'$$: Brennweitenberechnung

D.h., wenn wir für eine bestimmte Brennweite (Abstand y' in unserem Beispiel) eine Linsenform suchen, dann kann hierüber der Radius dieser Linse als Näherung errechnet werden. Parallelstrahlen wie z.B. Sonnenstrahlen würden sich durch eine solche Linsenform fokussieren lassen und im Punkt F sammeln.



Das führt uns jetzt zu einer Erweiterung der Problemstellung, wenn neben dem Radius r_1 noch ein weiterer Radius r_2 hinzukommt. Das hat schon sehr große Ähnlichkeit mit den Linsensystemen, wie sie für Brillen beim Optiker verwendet werden.

$$t_1 + t_2 = \left(t_1 - \frac{h^2}{2\cdot x}\cdot\frac{1}{c_L} - \frac{h^2}{2\cdot r_1}\cdot\frac{1}{c_L}\right) + \left(t_2 - \frac{h^2}{2\cdot y}\cdot\frac{1}{c_L} + \frac{h^2}{2\cdot r_2}\cdot\frac{1}{c_L}\right) + \left(\frac{h^2}{2\cdot r_1} - \frac{h^2}{2\cdot r_2}\right)\cdot\frac{1}{c_M}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{-h^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{x\cdot c_L} + \frac{1}{r_1\cdot c_L} + \frac{1}{y\cdot c_L} - \frac{1}{r_2\cdot c_L} + \frac{1}{r_2\cdot c_M} - \frac{1}{r_1\cdot c_M}\right)$$

$$\rightarrow 0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cdot\left(\frac{c_L}{c_M} - 1\right) \qquad \rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{y} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cdot(n-1)}} \quad wenn \quad x \rightarrow \infty$$

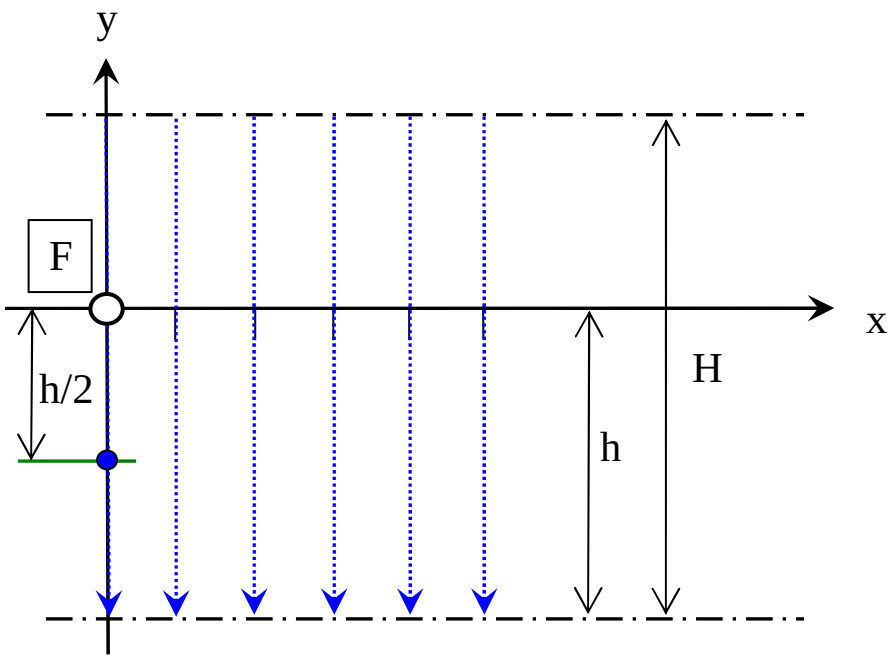
D.h., solange der Klammerausdruck mit den reziproken Radien positiv ausfällt, fokussiert sich das Licht im Punkt F rechts von der Linse (Sammellinse bzw. Vergrößerungsglas). Sobald aber der Radius r_1 negativ wird (Krümmung verläuft in Gegenrichtung) und r_2 positiv bleibt, dann wird das Profil nach außen hin immer dicker. In diesem Fall handelt es sich um eine Zerstreuungslinse, deren virtueller Brennpunkt links vom Punkt P gelegen ist. Negativ wird dieser Klammerausdruck aber auch, wenn beispielsweise der Radius r_2 kleiner als r_1 ist. Auch dann verhalten sich die Lichtstrahlen so, als würden sie links von P in einem virtuellen Brennpunkt ausgehen wollen.

Mit diesem Kapitel über die "Methode der Gleichzeitigkeit" haben wir nun ein Anwendungsbeispiel kennengelernt, wie man die Brennpunkte und Radien eines Linsensystems in Beziehung setzen kann. Mit dem folgenden Kapitel erhalten wir einen weiteren Einblick, wie mit dieser Methode Spiegelsysteme konstruiert werden können, die Brennpunkte aufweisen. Wir wechseln von der Lichtbrechung in den Bereich der Reflexion und setzen erneut voraus, dass alle Lichtstrahlen dieselbe Zeit benötigen.

2.3.4 Der Brennpunkt eines konkav gewölbten Spiegels:

Mit der jetzt kommenden Konstruktion und Herleitung einer Kurve, bei welcher alle Parallelstrahlen mittels Reflexion durch einen Brennpunkt F gehen, soll auch der Nachweis angeführt werden, dass diese Kurve in jedem Punkt auch das Reflexionsgesetz widerspiegelt.

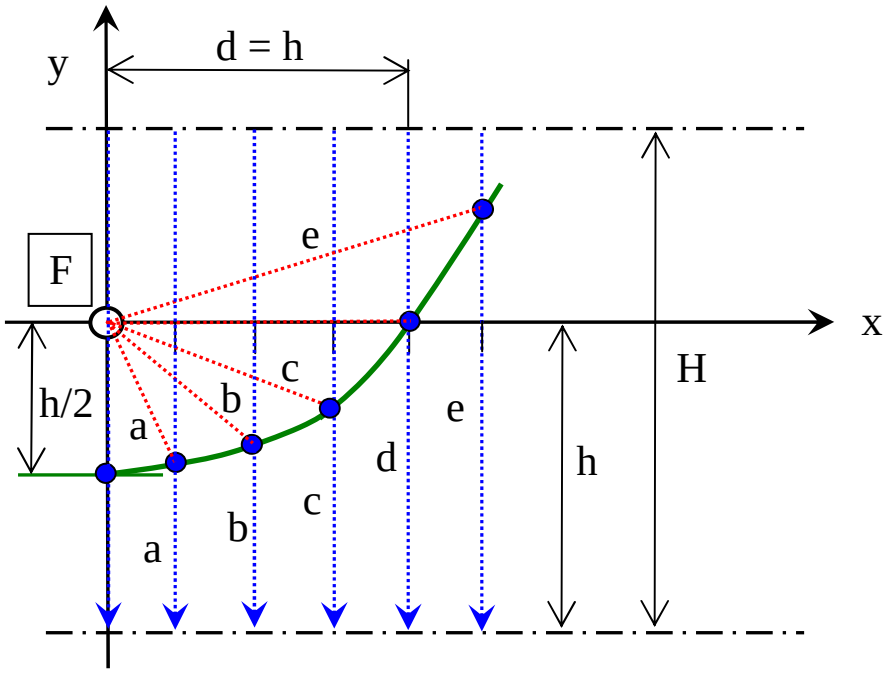
Für diese Konstruktion stellen wir uns vor, die Parallelstrahlen kommen von oben und gehen nach unten und werden dann an einer Kurve gespiegelt, sodass sie alle nach F reflektiert werden. Dabei soll der Strahl, welcher mit der y-Achse zusammenfällt, von der Kurve wieder senkrecht nach oben gespiegelt werden. Dieser Strahlengang soll daher einen Referenzpunkt (bei $y_0 = -h/2$) auf der Kurve festlegen, quasi dort einen Startpunkt abbilden. Alle Parallelstrahlen haben als Ausgangslänge das Maß H und sollen diese Länge als Strahlengang auch nach der Reflexion beibehalten. Der Ursprung (Nullpunkt) des x-y-Koordinatensystems soll mit dem Brennpunkt F übereinstimmen.



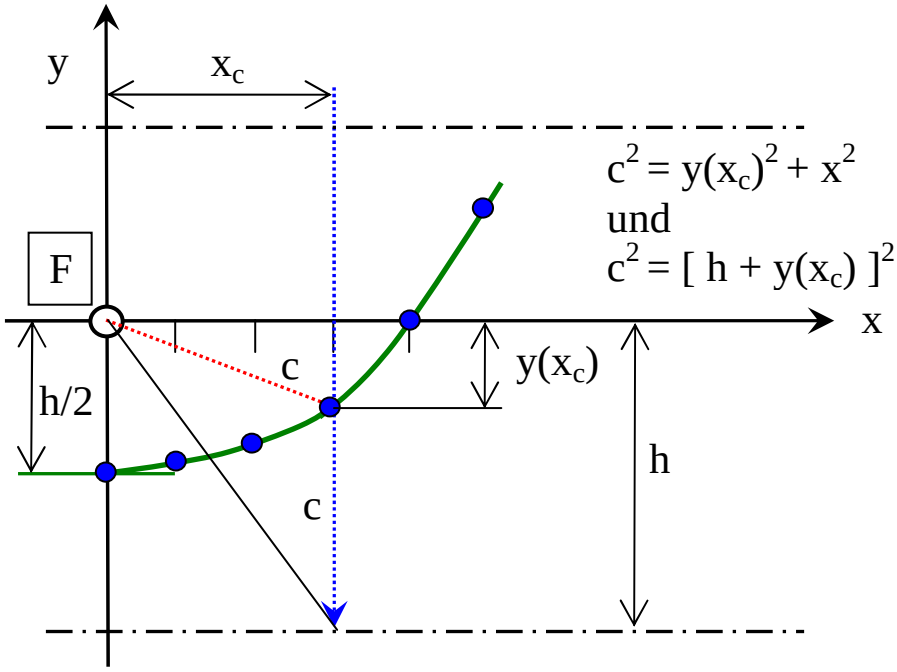
In der folgenden Skizze konstruieren wir nun einen Kurvenverlauf auf die Weise, dass die Streckenabschnitte a, b, c, d, und e, die senkrecht unter der Kurve wegfallen, genauso lang sind wie die Streckenabschnitte a, b, c, d und e von der Kurve bis zum Brennpunkt F.

Die Kurve hat somit zwei markante Aussagen:
$y_{(x=0)} = -h/2$ und $y_{(x=h)} = 0$ sowie eine waagerechte Tangente beim Punkt $y_{(x=0)}$.

Wenn diese Kurve durch die Eigenschaft eines Polynoms ausgedrückt werden kann, so muss diese mindestens zweiten Grades sein. Anhand der nächsten Skizzen lässt sich nun eine Gleichung aufstellen, die diesen Kurvenlauf beschreibt, ohne erst einmal darauf zu achten, ob der beschriebene Kurvenverlauf überhaupt in jedem Punkt mit den Reflexionsgesetz vereinbar ist. Was vorerst erfüllt ist, das ist die benötigte Zeit der Strahlen, die von der oberen Strichpunktlinie aus starten und von dem Kurvenast aus in den Brennpunkt F abprallen.



Um die Gleichung für die Kurve ableiten zu können, soll der Strahlengang mit den Teilstrecken c näher betrachtet werden. Das Quadrat der Strecke c lässt sich dann auf zweierlei Weisen berechnen.

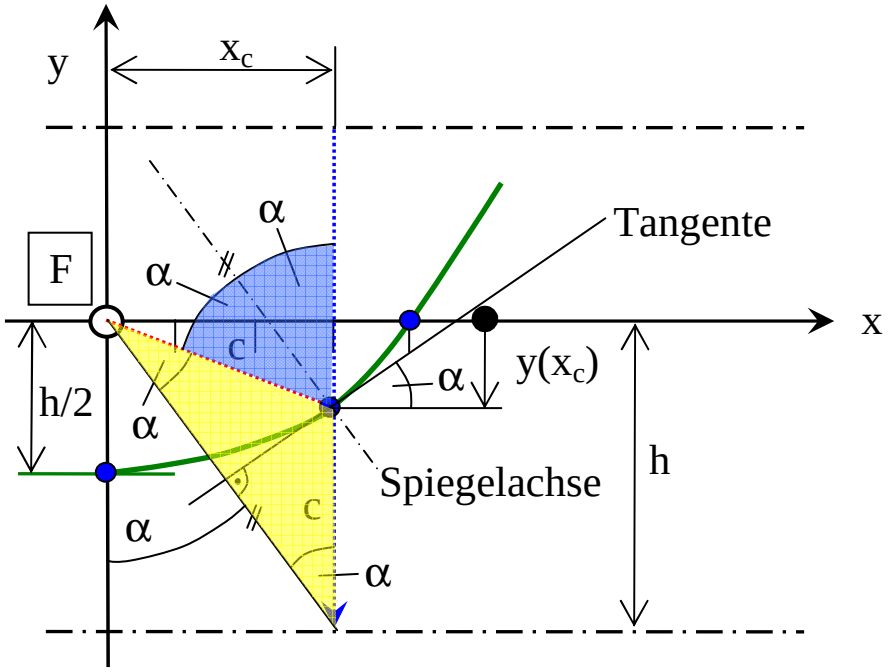


$$c^2 = y^2 + x^2 = (h+y)^2$$

$$y^2 + x^2 = h^2 + 2h \cdot y + y^2 \qquad \rightarrow \underline{\underline{y = \frac{x^2 - h^2}{2h}}} \qquad : \ \textit{Polynom} \ \ 2. \ \ \textit{Grades}$$

Es liegt also eine Parabel in diesem Fall vor.

Was als nächster Schritt noch fehlt, das ist die Bestätigung dafür, dass in allen Punkten dieses parabolischen Kurvenprofils die Parallelstrahlen nach F gespiegelt werden. Wir nehmen zur Veranschaulichung wieder den Strahlenverlauf im Abstand x_c von der y-Achse.
Das gelbe Dreieck besitzt zwei gleich lange Schenkel der Länge c, also mit der Distanz vom Brennpunkt F aus bis zum Punkt der Kurve bei x_c. Demzufolge hat dieses Dreieck auch zwei identische spitze Winkel α. Der dritte Winkel im gelben Dreieck wird durch den Wert (180°-2α) gebildet. Das bedeutet nun, dass der Nebenwinkel davon (hellblau gefärbt) gleich dem doppelten Winkel α entspricht. Das wäre aber der ganze Winkel zwischen dem bei x_c einfallenden Strahl und dem reflektierten Strahl nach F. In diesem Fall muss die Spiegelachse diesen Winkel halbieren, damit das Reflektionsgesetz eingehalten wird. D.h., der Einfalls- und Austrittswinkel entspricht dem Winkel α, dessen Tangenswert durch tan α = x_c/h ausgedrückt werden kann. Damit im Kurvenpunkt bei x_c der einfallende Strahl auf diese Weise reflektiert werden kann, muss die Kurventangente in diesem Punkt senkrecht zur Spiegelachse liegen. Das bedeutet wiederum, dass die Tangentensteigung dy/dx dort ebenfalls dem tan α entsprechen muss.



Die erste Ableitung nach dx liefert für die Kurve die Tangentensteigung, sodass dann nur der Wert x_c zur Kontrolle einzusetzen wäre.

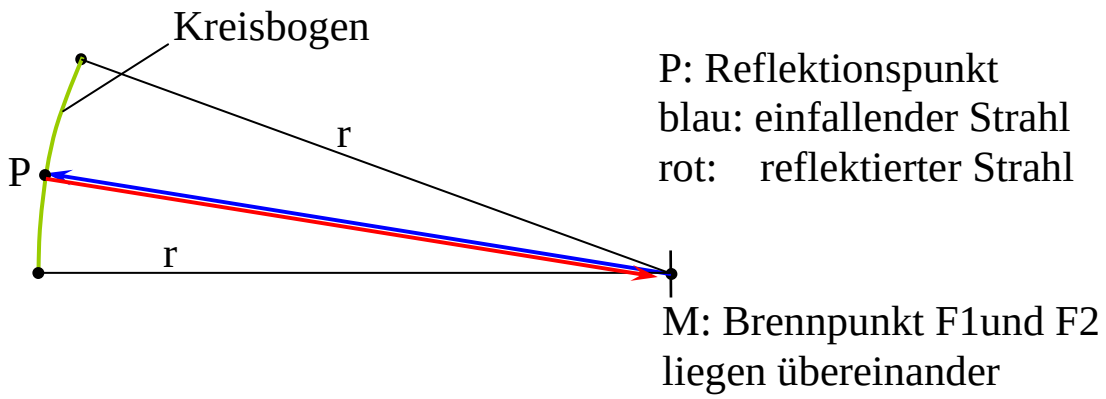
$$y(x) = \frac{1}{2h} \cdot \left(x^2 - h^2\right)$$

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{x}{h} \qquad \rightarrow \underline{y'(x_c) = \frac{x_c}{h} = \tan\alpha}$$

Wie man sieht, zeigt das Ergebnis tan α = x_c/h, dass dieser Wert sowohl als Tangentensteigung im Spiegelpunkt als auch im weißen Dreieck vorliegt, da dort die Gegenkathete durch x_c und die Ankathete durch h ausgedrückt wird.

2.3.5 Die Brennpunkte weiterer Reflexionsprofile (Kegelschnitte):

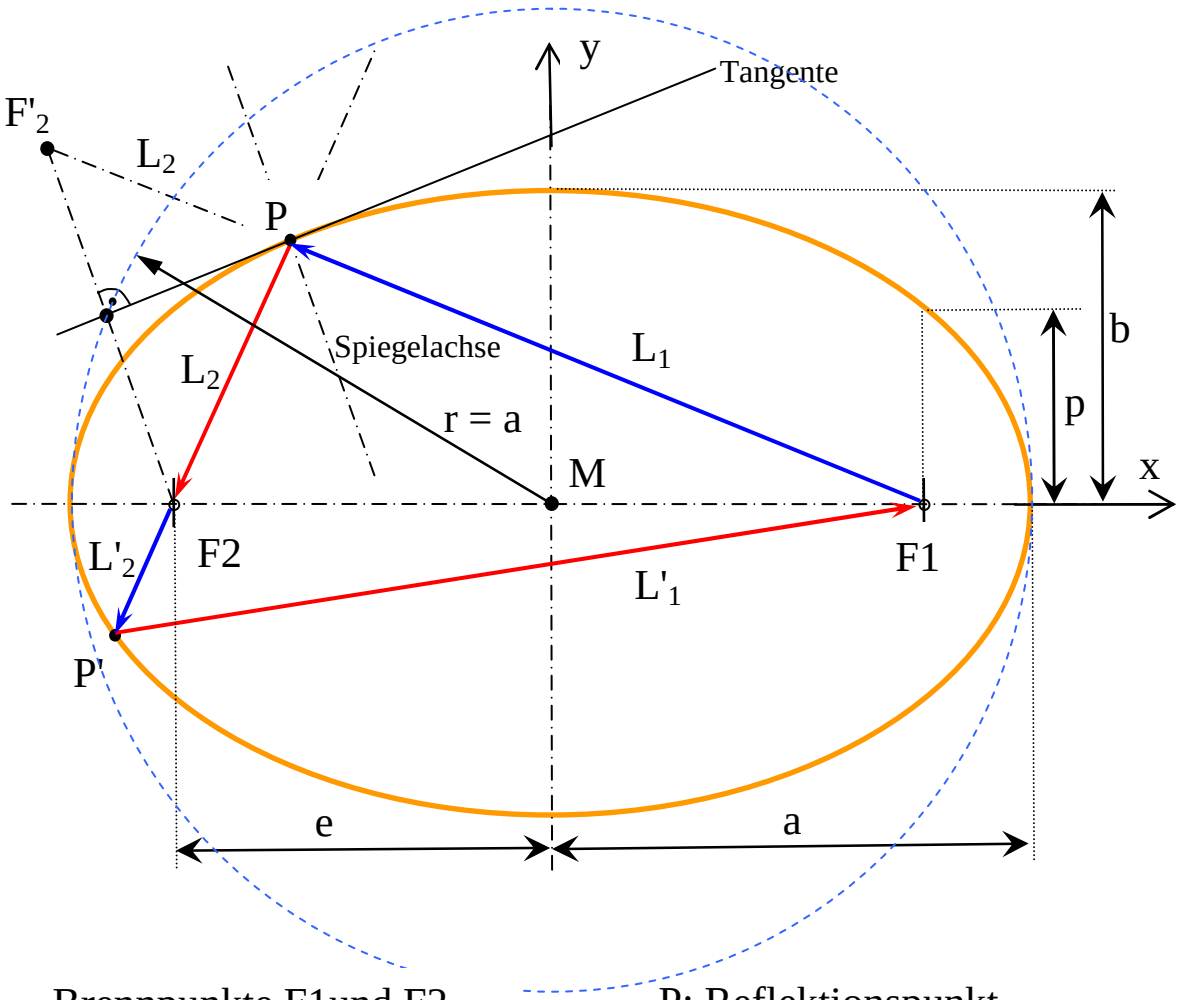
Die Parabel des vorherigen Kapitels stellt also ein Reflexionsprofil dar, welches eine Vielzahl von Parallelstrahlen in einen Brennpunkt F spiegelt bzw. fokussiert. Wir werden im Folgenden sehen, welche anderen Kurvenverläufe die Eigenschaften besitzen, das Licht in Brennpunkte zu vereinigen. Und bei allen diesen Kurven dürfen wir davon ausgehen, dass die Laufzeit des Lichts mit der Methode der Gleichzeitigkeit korrespondiert.
Ein sehr einfaches und ohne weitere Erklärungen einleuchtendes Beispiel stellt der Kreisbogen dar. Die Eigenschaft des Kreises ist, dass alle Lichtstrahlen, die durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, nach dort auch wieder reflektiert werden. D.h., der Quellenpunkt M des Lichtes ist identisch mit dem Brennpunkt. Oder wenn wir den Quellenpunkt ebenfalls als Brennpunkt bezeichnen, dann liegen beide Brennpunkte identisch übereinander.



Was geschieht nun, wenn die Brennpunkte F1 und F2 nicht mehr übereinander liegen, sondern im separatem Abstand voneinander liegen? Gemäß der Methode der Gleichzeitigkeit müsste die Streckensumme vom Brennpunkt F1 zum Reflektionspunkt und von dort wieder zurück zum Brennpunkt F2 immer als konstant vorausgesetzt werden. Die Konstruktion dieses Kurvenprofils kann man sich so vorstellen, als würde man einen Faden der Länge L mit dem einen Ende am Brennpunkt F1 und mit dem anderen Ende am Brennpunkt F2 befestigen. Spannt man nun den Faden mit einem Stift, dann kann dieser Stift den Kurvenverlauf markieren, wenn der Faden stets straff gehalten wird. Diese Art der Kurvenbeschreibung bezeichnet man als so genannte "Gärtnerkonstruktion einer Ellipse". Denn die Eigenschaft einer Ellipse ist, dass die Strahlen aus dem einen Brennpunkt in den anderen Brennpunkt der Ellipse gespiegelt werden kann und umgekehrt.

Anhand der folgenden Skizze werden die Eigenschaften einer Ellipse dargestellt. Unter einer Ellipse darf man sich einen deformierten Kreis vorstellen, der zusammengedrückt wird. Durch diese Deformation kommt es zur Trennung des Kreismittelpunktes, welcher sich dann in zwei Brennpunkte aufspaltet. Die Ellipse besitzt zwei Radien: Der große Radius a liegt auf der Achse, auf welcher sich auch die Brennpunkte befinden. Senkrecht dazu liegt der kleine Radius b. Die Summe der sogenannten Leitstrahlen, die von den Brennpunkten ausgehen und einen Punkt P auf der Ellipsenkurve abbilden, bleibt stets dieselbe und hat den Wert vom doppelten Großradius a.

D.h., die Summe ist immer konstant: $L_1 + L_2 = L'_1 + L'_2 = \text{const.} = 2a$



Brennpunkte F1und F2 liegen im Abstand e voneinander entfernt

P: Reflektionspunkt
blau: einfallender Strahl
rot: reflektierter Strahl

Ein Lichtstrahl, der vom Brennpunkt F1 ausgesendet wird, findet nach der ersten Reflexion bei P den Weg durch den Brennpunkt F2 und wird dann wiederum im Punkt P' so reflektiert, dass er wieder am Ausgangspunkt F1 zurückkehrt.

Mathematisch werden diese Eigenschaften der Ellipse wie folgt ausgedrückt:

<u>Mittelpunktsgleichung:</u>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<u>Lineare Exzentrizität:</u>

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

<u>Leitstrahlensumme:</u>

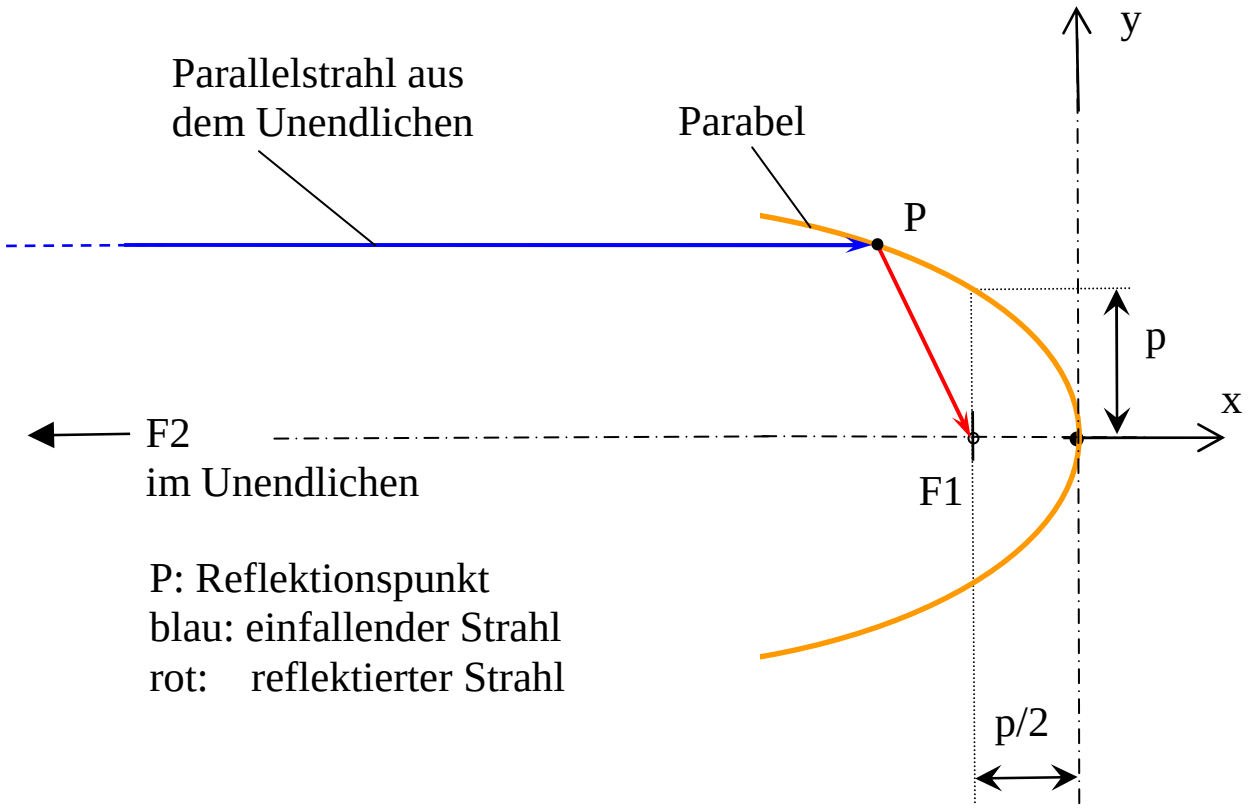
$$L_1 + L_2 = 2 \cdot a$$

<u>Parameter p (Höhe über Brennpunkt):</u>

$$p = \frac{b^2}{a}$$

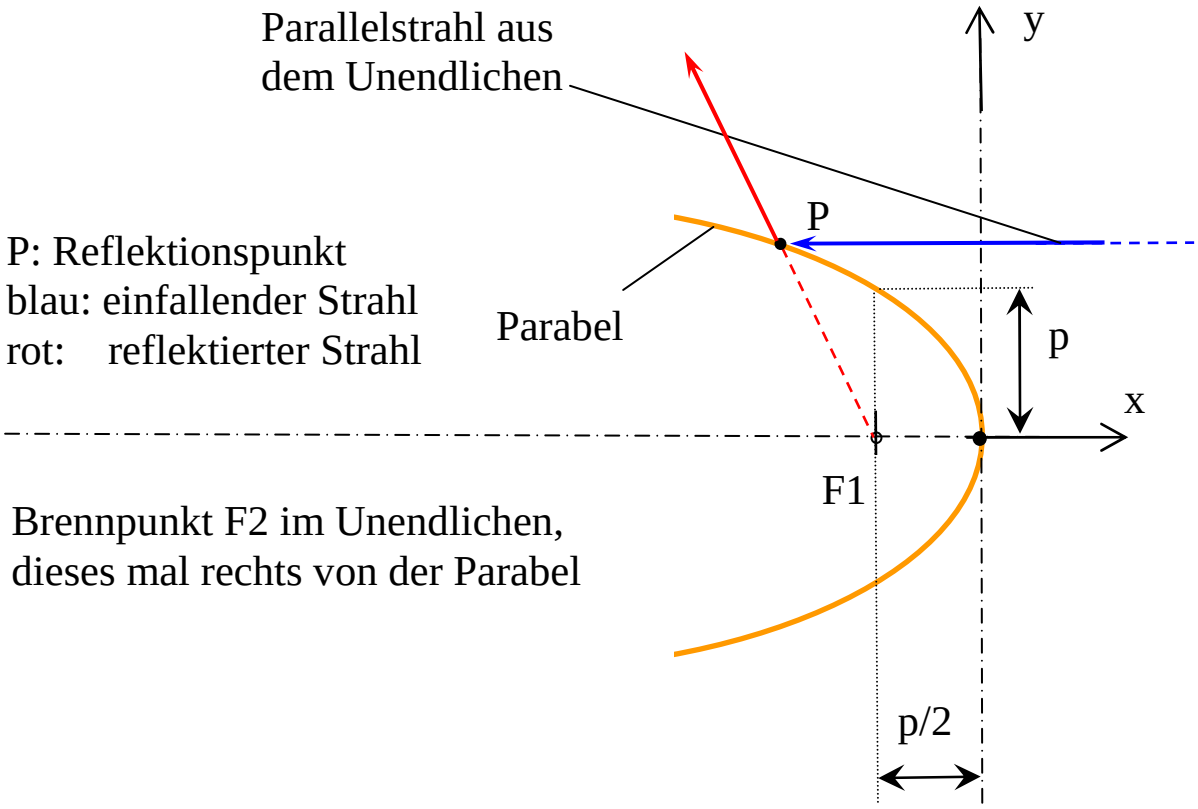
Das Prinzip von Fermat findet bei der Ellipse in Bezug auf die Spiegelung der Leitstrahlen seine Anwendung, denn die Tangente im Punkt P des Kurvenverlaufs ist zugleich Spiegelebene für den dort eintreffenden Strahl von einem Brennpunkt zum anderen. Der Kurvenverlauf der Ellipse selbst in seiner Gesamtheit ist dann eine Eigenschaft, die sich aus der Methode der Gleichzeitigkeit ableitet, denn die Wegstrecke von einem Brennpunkt zum anderen per Reflexion ist immer das Zweifache vom großen Radius a.

Damit kämen wir nun zum dritten Kegelschnitt, nämlich der Parabel. Und hier können wir den weiteren Gedankengang verfolgen, die Ellipse noch mehr zu deformieren, sodass die beiden Brennpunkte F1 und F2 immer weiter auseinander gedrängt werden. Behalten wir also die ganz rechte Seite der Ellipse mit dem Brennpunkt F1 im Auge und schauen was passiert, wenn der Brennpunkt F2 bis ins Unendliche nach links gezogen wird. Die Deformation des rechten elliptischen Kurvenastes wird bei diesem Verfahren immer mehr Ähnlichkeiten mit einer parabolischen Kurve erhalten. Wenn theoretisch der Brennpunkt F2 im Unendlichen gelandet ist, dann liegt ein Grenzübergang hin zu einer Parabel vor. In analoger Weise gilt dann trotzdem noch die Eigenschaft der Ellipse, dass die Leitstrahlen an der Kurve gespiegelt wieder in die Brennpunkte verlaufen. Und hier können wir dann auch beim Parallelenaxiom von Euklid ansetzen, welches besagt, dass sich zwei parallele Gerade im Unendlichen schneiden. Im Umkehrschluss dürfen wir also davon ausgehen, dass alle Strahlen vom Brennpunkt F2 (liegt unendlich weit weg) sich wie Parallelstrahlen verhalten und somit an der Parabelkurve in den Brennpunkt F1 gespiegelt werden.
Genau diese Eigenschaft hatten wir im Kapitel 2.3.4 behandelt, als es um die Suche nach einem Reflexionsprofil ging, das Parallelstrahlen in einen Brennpunkt spiegelt.

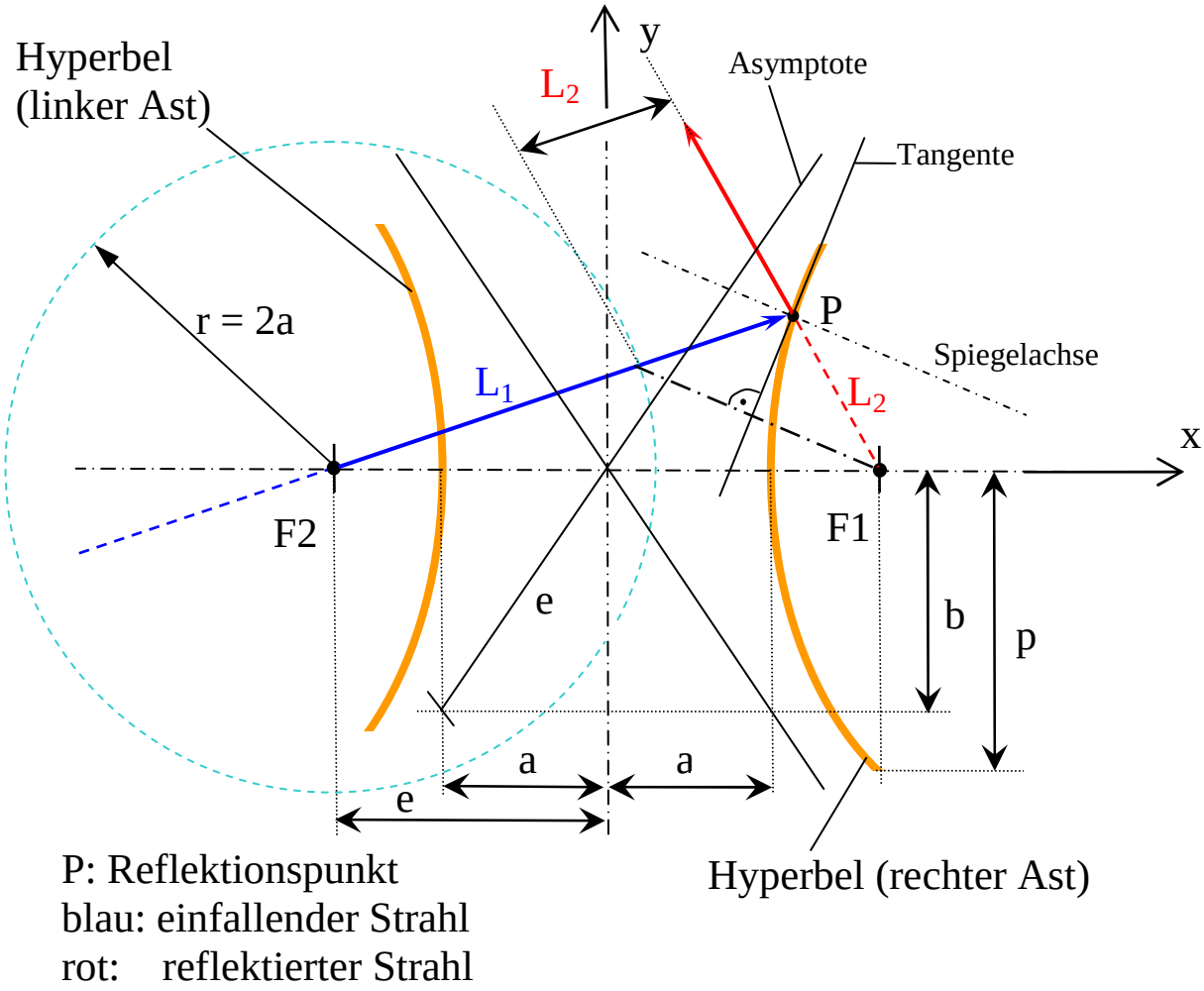


Schlussendlich bleibt der vierte Kegelschnitt, der durch die Hyperbel ausgedrückt wird. Hier muss man sich jetzt die Frage stellen, welche Eigenschaft sich mit dieser Kurve vereinbaren lässt. Beim Kreis sowie bei der Ellipse und der Parabel gab es eine Gemeinsamkeit. Alle Strahlen haben die Kurven von der konkaven Seite her getroffen, also im Sinne eines "Hohlspiegels" ihren Weg genommen. Aber ähnlich wie bei der Zerstreuungslinse gibt es nun auch die Möglichkeit, einen Wölbspiegel (konvexe Seite als Spiegelfläche) zu konstruieren, mit der Eigenschaft, dass alle reflektierten Strahlen so verlaufen als würden sie von einem virtuellen Brennpunkt aus starten. Und diesen Charakter besitzt nun im Allgemeinen eine Hyperbelkurve.

Der eine Brennpunkt einer Hyperbel liegt weiterhin auf der konkaven Kurvenseite, während der andere Brennpunkt außerhalb davon, sich also auf der konvexen Seite befindet. Hier können wir wieder eine Grenzbetrachtung wie beim Übergang Ellipse => Parabel machen, nur dieses mal in umgekehrter Folge. Stellen wir uns vor, der zweite Brennpunkt auf der konvexen Seite würde unendlich weit weg sein, dann wären alle am Wölbprofil auftreffenden Strahlen parallel. In diesem Grenzfall sind wir aber wieder bei der Parabel, welche punktuell die Grenze zwischen Ellipse und Hyperbel bildet. D.h., wenn wir bei der obig behandelten Parabel die Parallelstrahlen von der anderen Seite her auftreffen lassen, dann hätten wir mit demselben Brennpunkt F1 (nun virtuell) die Eigenschaft einer Zerstreuung der Strahlen, die scheinbar von diesem Brennpunkt aus kommen.



Bleibt daher nur noch der Fall zu behandeln, bei dem der zweite Brennpunkt F2 im Endlichen vorliegt, womit die gedankliche Kurvendeformation der Parabel in Richtung einer Hyperbel übergeht.



Mathematisch werden diese Eigenschaften der Hyperbel wie folgt ausgedrückt:

<u>Mittelpunktsgleichung:</u>

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<u>Lineare Exzentrizität:</u>

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

<u>Leitstrahlensumme:</u>

$$L_1 - L_2 = 2 \cdot a$$

<u>Parameter p (Höhe über Brennpunkt):</u>

$$p = \frac{b^2}{a}$$

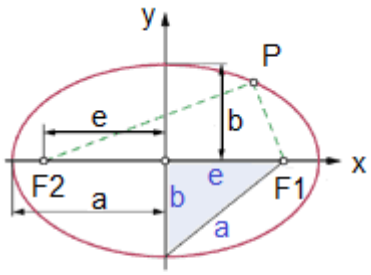
An der Gleichung der Leitstrahlensumme erkennen wir, auf welche Weise die Methode der Gleichzeitigkeit bei diesem Fall anzuwenden ist. Das ist jetzt etwas schwieriger zu deuten, weil die Wegstrecke L_2 gar nicht durchlaufen wird. Auf dem ersten Blick sehen wir nämlich nur, dass entlang der Hyperbel die Wegdistanzen L_1 bis zu den Spiegelpunkten P unterschiedlich ausfallen werden. Für diesen Fall muss unsere Aussage so lauten, dass die Forderung einer konstanten Leitstrahlensumme sofern zu gelten hat, weil die Wegdistanz L_2 als eingesparter Weg anzusehen ist. Daraus resultiert also eine Differenz der beiden Leitstrahlen, welche in jedem Punkt P konstant den Wert 2a liefern muss.

Es verhält sich also so, als würde der reflektierte Strahl (rot) schon vorzeitig im Brennpunkt F1 gestartet sein, um dann zeitgleich im Punkt P mit dem einfallenden Strahl (blau) zusammenzustoßen und als realer reflektierter Strahl (rot) fortzulaufen. Der virtuell vorzeitige Start vom Brennpunkt F1 lässt sich somit als negative Zeit bzw. als Zeitersparnis auffassen, die bei der Methode der Gleichzeitigkeit ins Kalkül gezogen wird.

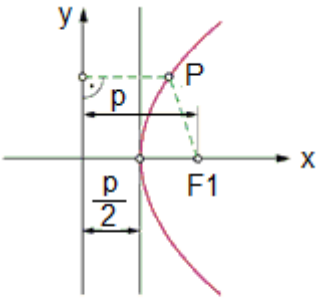
Damit wären alle Kegelschnitte als Reflektionsprofile behandelt, die dem Prinzip der kürzesten Zeit und der Methode der Gleichzeitigkeit gehorchen. Daher möchte ich eine kurze Zusammenfassung hinsichtlich dieser Kegelschnitte abschließend wiedergeben, deren besondere Eigenschaften sich aus der Lage ihrer Brennpunkte zueinander ergeben.

<u>Zusammenfassung:</u>

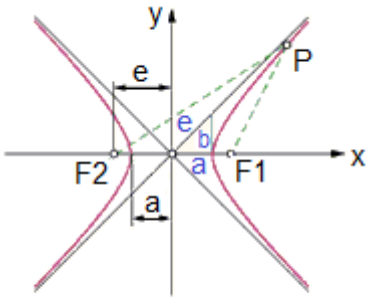
KEGELSCHNITTE	Kreis	Ellipse	Hyperbel	Parabel
Lage der Brennpunkte F1 / F2	F1 und F2 liegen übereinander im Kreismittelpunkt	F1 und F2 liegen innerhalb der Ellipse	F1 liegt auf der konkaven Seite des rechten Hyperbel-Astes. F2 liegt auf der konkaven Seite des linken Hyperbel-Astes.	F1 liegt auf der konkaven Seite im Abstand p/2 zum Scheitelpunkt. F2 liegt im Unendlichen (+ unendlich oder - unendlich)
Abstand der Brennpunkte zueinander	0	2e		unendlich
Leitstrahlendistanzen zwischen den Brennpunkten	L1 + L2 = 2a		L1 - L2 = 2a	unendlich
Mittelpunktsgleichung	$\kappa_1 \cdot \frac{x^2}{a^2} + \kappa_2 \cdot \frac{y^2}{b^2} = 1$			$\kappa_1 \cdot 2 \cdot \frac{x}{p} + \kappa_2 \cdot \frac{y^2}{p^2} = 1$
Scheitelgleichung	$y^2 = 2 \cdot p \cdot x - \kappa_3 \cdot \frac{p}{a} \cdot x^2$			
lineare Exzentrizität e	0	$\sqrt{a^2 - \kappa_3 \cdot b^2} \quad mit \quad a > b$		-
Parameter p	r = a = b	$\frac{b^2}{a} \quad mit \quad a > b$		h
κ_1	1			
κ_2	1		-1	
κ_3	1		-1	0
Krümmungsradius im Scheitelpunkt	r = a = b = p	$R = \frac{a^2}{b} \quad ; \quad r = \frac{b^2}{a} = p$	$\frac{b^2}{a} = p$	$h = p$



Ellipse

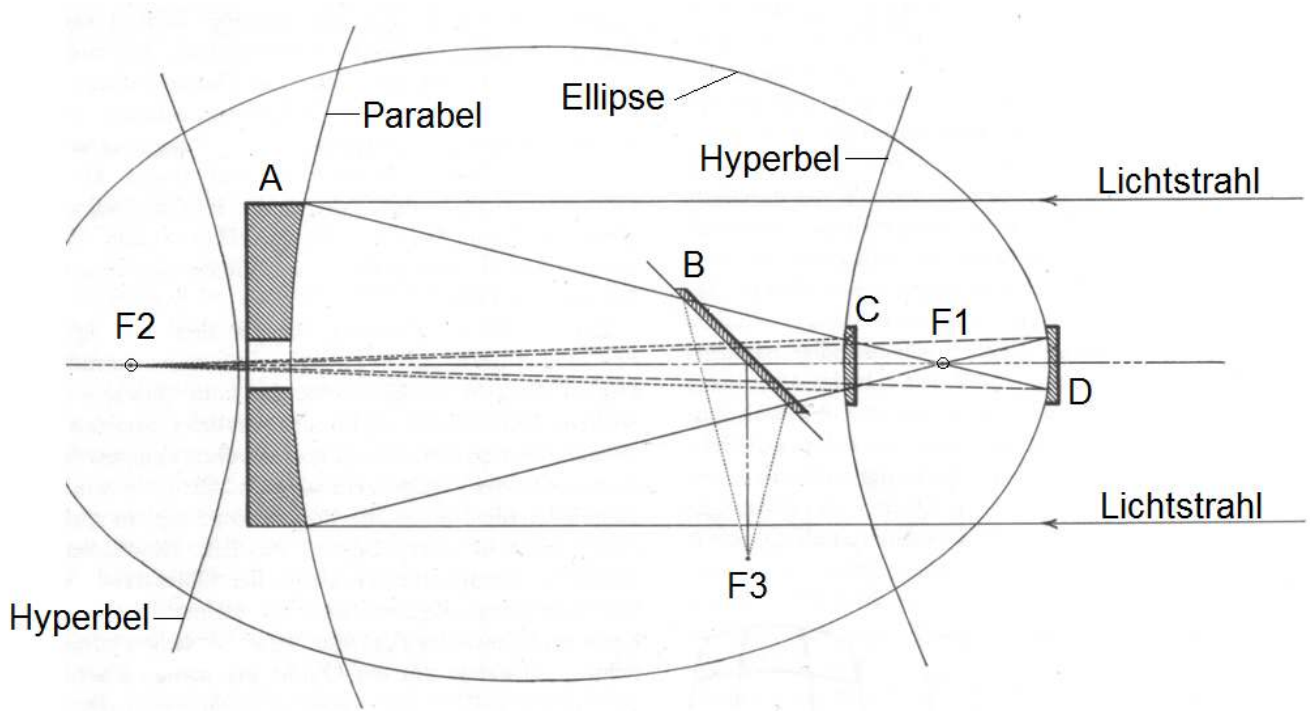


Parabel



Hyperbel

Mit diesem Wissen besitzen wir nun ein besseres Verständnis für die diversen Varianten von Spiegelteleskop-Konstruktionen für die astronomischen Beobachtungen. In der Regel wird der Hauptspiegel durch einen Parabolspiegel A realisiert, der die Parallelstrahlen des einfallenden Lichts in den Brennpunkt F1 sammeln möchte.



<u>Strahlengänge für drei Teleskop-Arten</u>: 1) Newton-T., 2) Cassegrain-T., 3) Gregory-T.

1)
Bei einem Newton-Teleskop wird der Lichtstrahl vorher schon an einem Planspiegel B nach F3 reflektiert und dort ins Okular weitergeleitet.
2)
Bei einem Cassegrain-Teleskop treffen die Lichtstrahlen ebenfalls vorher auf einen hyperbolisch gewölbten Spiegel C, der die Strahlen dann nach F2 ins Okular reflektiert.
3)
Bei einem Gregory-Teleskop durchlaufen die Lichtstrahlen den Brennpunkt F1, werden dann an dem elliptisch gewölbten Hohlspiegel D ebenfalls zum gegenüberliegenden Brennpunkt F2 der Ellipse ins Okular reflektiert.

Das Okular selbst ist dann je nach Typus wiederum eine Konstruktion aus mehreren Linsen, die sowohl Sammellinsen als auch Zerstreuungslinsen beinhalten kann. Und somit hätten wir allein beim Beispiel des Spiegelteleskops sämtliche Eigenschaften für die Reflektion und Brechung vertreten, die mit den Kapiteln 2.3.3 bis 2.3.5 behandelt wurden.

Somit soll ein hinreichendes Fundament an Beispielen für die Reflektion und Brechung gegeben sein, um im Weiteren die Behandlung des Regenbogens in Angriff nehmen zu können. Wir werden sehen, dass hier die Gesetze der Brechung und Reflektion innerhalb des Wassertropfens diese Erscheinung erklären kann. Mit dem Prinzip von Fermat und der Methode der Gleichzeitigkeit stehen uns Instrumente zur Verfügung, mit denen man die Farbenpracht und Gestalt des Regenbogens anschaulich und elegant beschreiben kann.

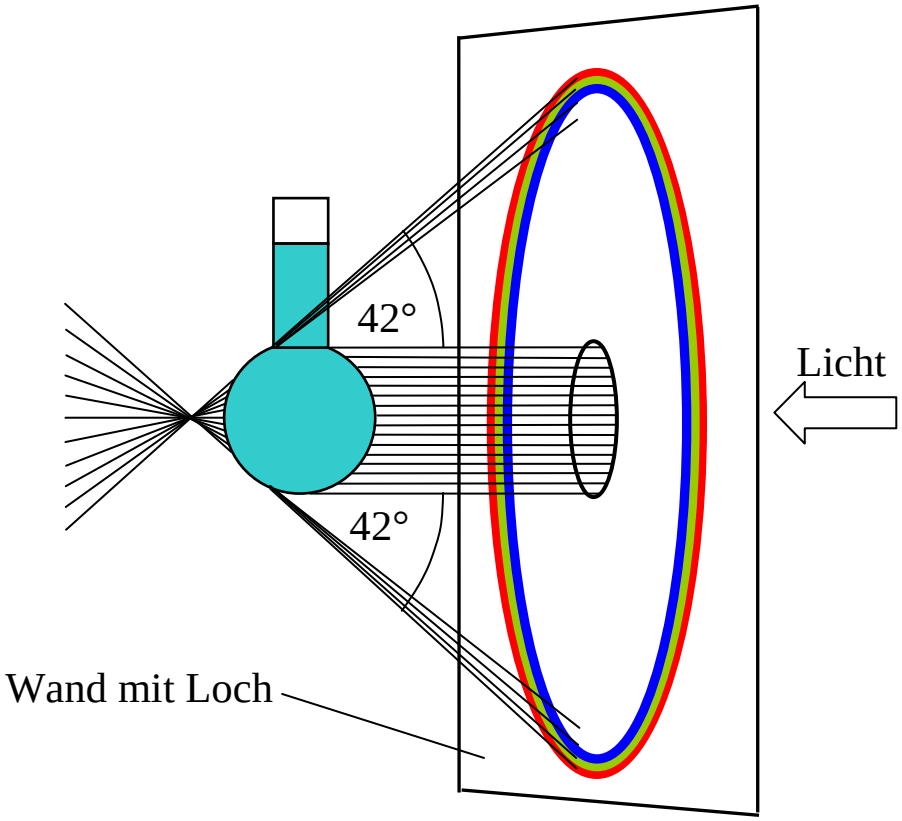
3. Der Regenbogen und seine Farben

Mit den vorangegangenen Kapiteln wurden einige theoretische Ableitungen hinsichtlich der Lichtbrechung und Reflektion mittels des Prinzips von Fermat erklärt. Immer wenn die Betrachtung sich allein auf einen Lichtstrahl und dessen Pfad konzentriert, kann das Prinzip der kürzesten Zeit sehr gute Dienste leisten. Wir haben aber auch gesehen, sobald mehrere Lichtstrahlen im Spiel sind, wie z.B. die Parallelstrahlen von der Sonne, diese über die Methode der Gleichzeitig abgehandelt werden können, sofern man die optischen Eigenschaften eines Brennpunkts bei Linsen oder Spiegeln zu erklären versucht.

Beim Regenbogen treffen wir wieder auf dieselben Elemente, die sich mit den bisherigen Methoden beschreiben lassen. Denn Ausgangspunkt sind die Sonnenstrahlen, die sich auf besondere Weise durch einen Regentropfen bewegen, um von dort aus zu uns (dem Beobachter) zu gelangen. René Descartes war einer der ersten, die in Verbindung mit dem Experiment und einer dazu ergänzenden Theorie eine beeindruckende Beschreibung des Regenbogens dokumentiert haben. Seine Theorie fußt auf der Theorie des Snellius'schen Brechungsgesetzes. Die Anwendung dieses Gesetzes ist jedoch nur dann von Erfolg gekrönt, wenn man vorher ganz genau die Strahlengänge innerhalb des Regenbogens untersucht hat. Und von dieser Untersuchung handelt nun das folgende Experiment von Descartes.

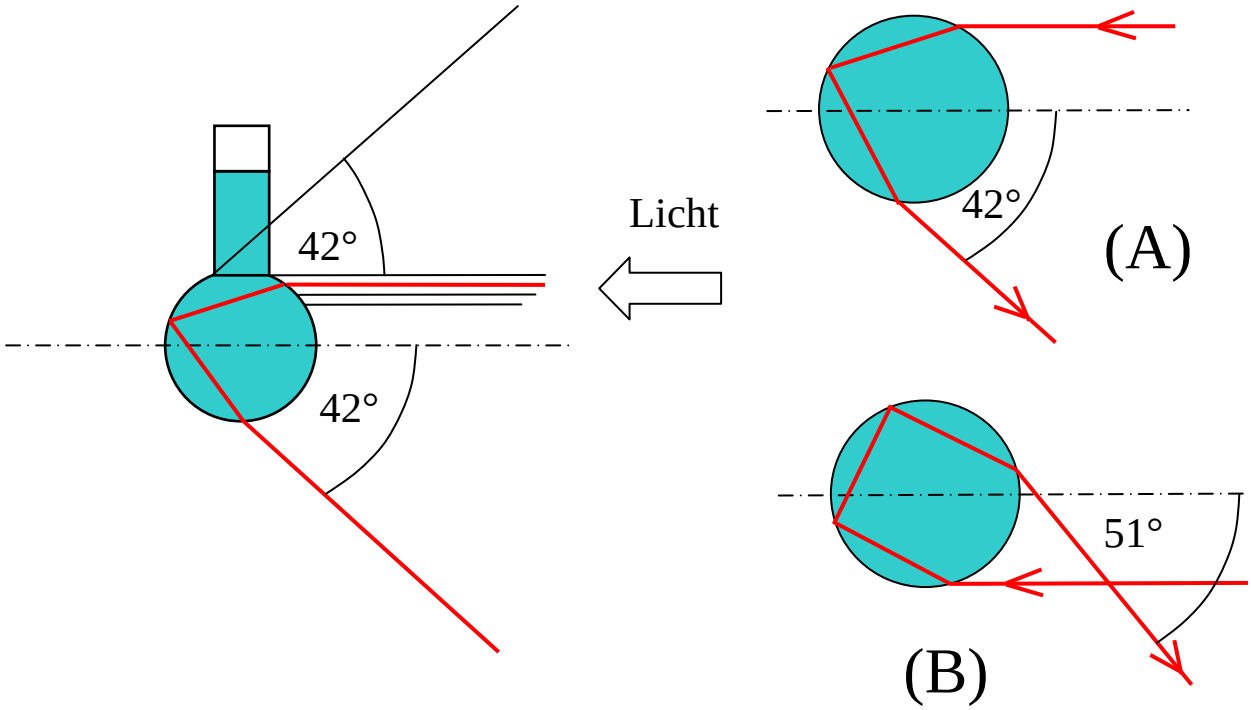
3.1 Descartes' Theorie vom Regenbogen:

Um die verschiedenen Lichtpfade untersuchen zu können, welche die naturgemäß von der Sonne stammenden Lichtstrahlen durch einen frei fallenden Regentropfen nehmen, hat Descartes eine idealisiert vergrößerte Gestalt eines Regentropfens bei seinem Experiment gewählt. Der Wassertropfen wird durch ein bauchiges Glasgefäß (Kugelgestalt) simuliert, in welchem sich klares Wasser befindet.



Dabei ließ er die Sonnenstrahlen durch ein Loch einer Projektionswand auf dieses Glasgefäß fallen, so wie es in verkleinerter Form auch beim Regentropfen passieren würde. Das Experiment bestätigte, dass auch bei dem vergrößerten Maßstab mittels des mit Wasser gefüllten Glaskolbens sich ein Regenbogen an der Projektionswand zeigt. D.h., die Sonnenstrahlen müssen auf ähnliche Weise im Glasgefäß gebrochen und reflektiert worden sein, so wie es in der Realität auch geschieht. Eine weitere Bestätigung fand dieses Experiment somit auch durch den ermittelten Projektionswinkel von ca. 42° (bezogen auf die Parallelstrahlen des Sonnenlichts), dessen Wert in der Natur beim Hauptbogen ebenso groß ausfällt.

Experimentell konnte Descartes somit auch feststellen, welche von den Lichtstrahlen bei der Erscheinung des Regenbogens hauptsächlich verantwortlich sind. Dazu bedurfte es lediglich, bestimmte Stellen am Glasgefäß abzudecken bzw. undurchsichtig zu machen. Als Ergebnis zeigte sich, dass ein ringförmiges Objekt mit dem 0,86-fachen des Glaskolbendurchmessers dazu imstande war, die Strahlen auszulöschen, die auch für den Hauptbogen des Regenbogens zuständig waren. In diesem Fall zeigte sich kein farbiger Bogen mehr am Projektionsschirm.

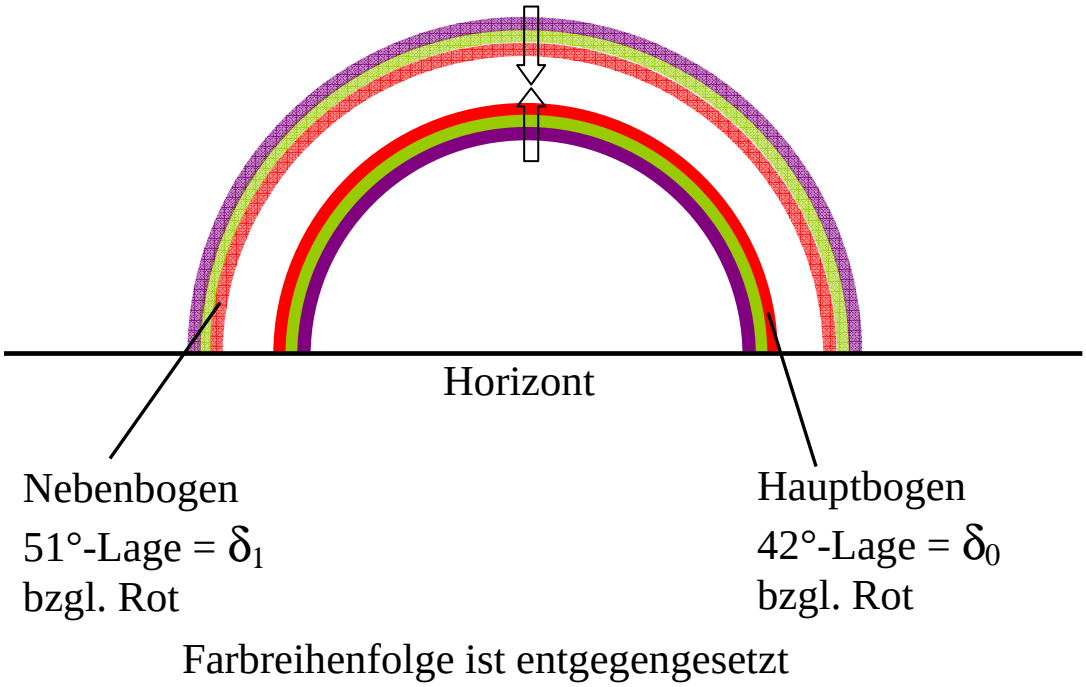


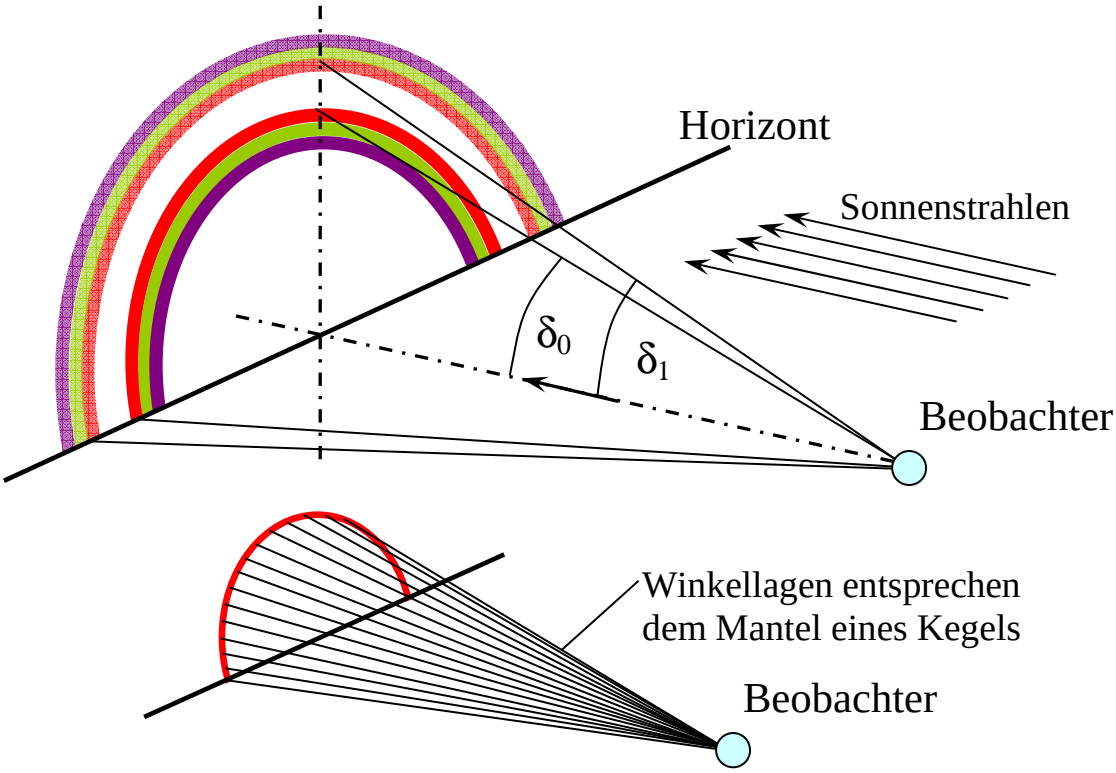
Für die Erklärung des Haupt- und Nebenbogens, so wird sich noch zeigen, sind zwei Strahlengänge verantwortlich. Einmal treten die Sonnenstrahlen (A) oben am Regentropfen ein, werden innerhalb des Tropfens einmal reflektiert, und treten mit einem 42°-Winkel (z.B. für rotes Licht) wieder aus den Tropfen heraus. Ein zweiter möglicher Vorgang zeigt das Bild (B). Hier treten die Sonnenstrahlen unten in den Tropfen ein, werden aber dann zweimal reflektiert, um schließlich in einem 51°-Winkel (rotes Licht) herauszutreten. Da bei jeder Reflektion innerhalb des Tropfens auch ein Anteil des Lichts als Transmission wieder aus den Tropfen tritt (als gebrochener Lichtstrahl), wird der Nebenbogen zwangsläufig eine schwächere Intensität aufweisen als der meist weitaus farbenprächtigere Hauptbogen.

Die Theorie des Strahlengangs nach Descartes werden wir nun etwas genauer beleuchten und mit dem Prinzip der kürzesten Zeit in Einklang bringen.

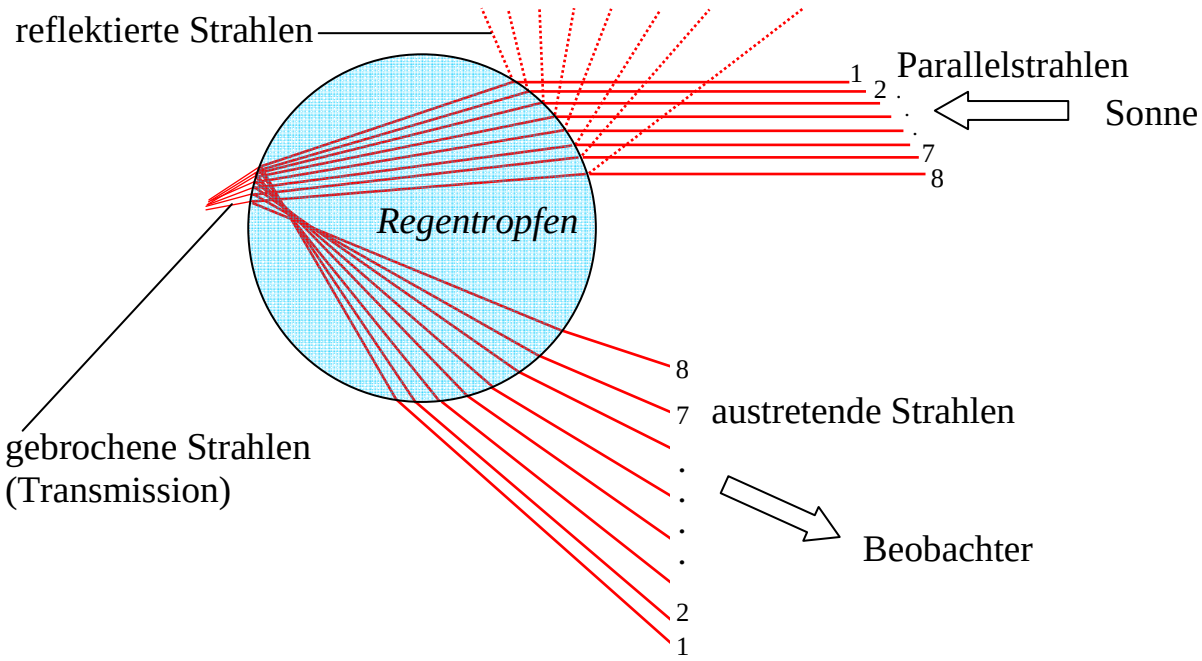
3.2 Das Phänomen des Regenbogen:

Bei der Beobachtung eines Regenbogens kann festgestellt werden, dass es einen sehr intensiv leuchtenden Hauptbogen gibt und unter günstigen Bedingungen zusätzlich noch ein weiterer Nebenbogen existiert. Beim Nebenbogen, mit einer Winkellage von etwa 51° steht dieser etwas steiler zum Beobachter als der Hauptbogen, ist die Farbenfolge genau umgekehrt zum Hauptbogen. Er beginnt von innen gesehen mit Rot und endet am äußeren Rand mit Violett.



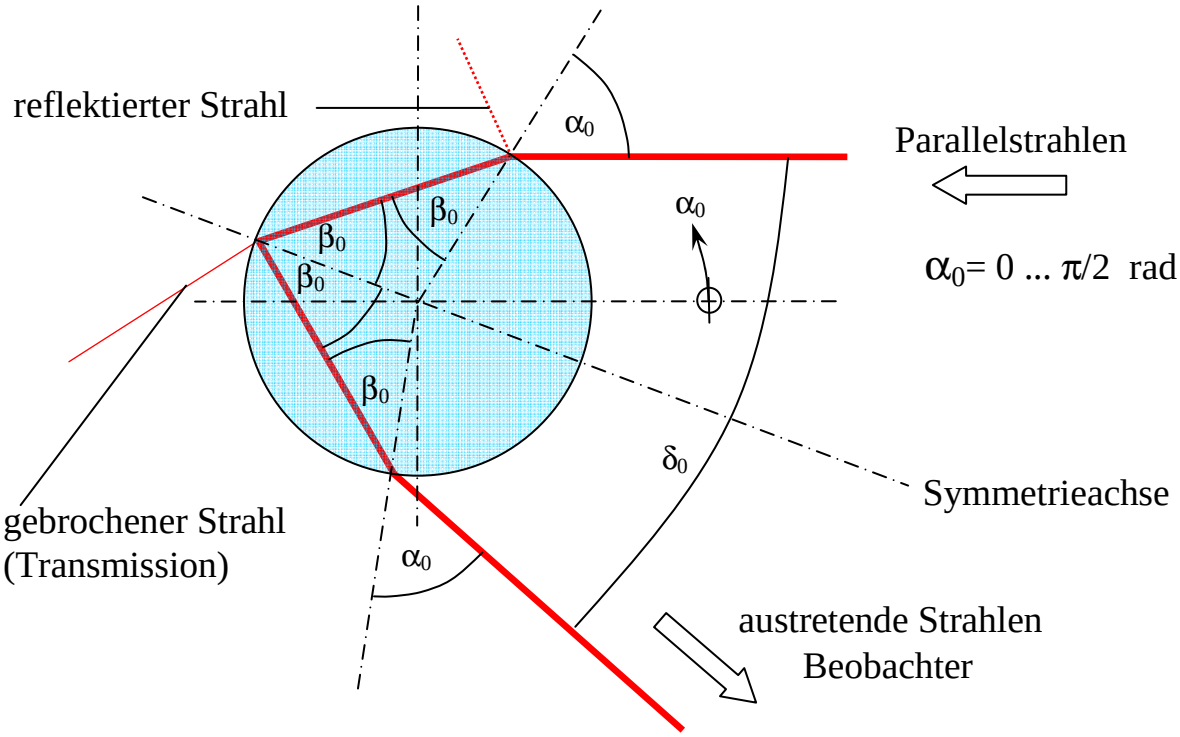


An dieser Stellen treffen wir also die Frage an, auf welche Art man die verschiedenen Winkellagen für Haupt- und Nebenbogen erhält, also welche Sonnenstrahlen am Regentropfen für diese Erscheinung verantwortlich sind und warum gerade diese Strahlen zu diesem Phänomen führen.
An diesem Punkt rufen wir uns in Erinnerung, dass im Fall der Brechung eines Lichtstrahls, wenn das Licht also in den Regentropfen eintritt, dieses gemäß des Prinzips der kürzesten Zeit geschieht. Gleiches trifft dann auch beim Austritt des Lichtstrahls zu. Aber auch im Falle der Reflektion im Tropfen gilt das Prinzip von Fermat, sodass generell der gesamte Pfad des Lichts durch den Tropfen in der kürzesten Zeit verlaufen wird. Nun gibt es eine Vielzahl von Parallelstrahlen, die auf den Regentropfen treffen können. Somit muss eine analytische Untersuchung aller parallelen Strahlengänge am Regentropfen (bei einer idealisierten Kugelgestalt) erfolgen.



Bei dieser Untersuchung behalten wir erst einmal nur einfarbiges Licht einer bestimmten Frequenz im Auge, wie z.B. das langwellige rote Licht des Sonnenspektrums. Laut der folgenden Skizze errechnen wir die Differenzwinkel δ_0 sämtlicher Parallelstrahlen oberhalb der Tropfenmittelachse (aus Symmetriegründen genügt dieses) und tragen diese dann später graphisch auf. (siehe Skizze auf der Folgeseite und das nachfolgende Diagramm)

Gestartet wird mit dem Parallelstrahl unter dem Winkel $\alpha_0 = 0°$, wenn also der Lichtstrahl genau auf die horizontale Mittelachse des Tropfens fällt. Endwinkel bildet der Wert $\alpha_0 = 90°$ bzw. in Bogenmaß ausgedrückt $\alpha_0 = \pi/2$, also wenn der Lichtstrahl die Tropfenoberfläche nur noch tangiert. Innerhalb dieses Winkelbereichs werden die Differenzwinkel δ_0 errechnet, und zwar nach dem Brechungsgesetz von Snellius, was im Grunde mit dem Prinzip von Fermat für den Strahlengang innerhalb des Tropfens gleichzusetzen ist. Die Abhängigkeit der Winkel α_0 zu δ_0 kann dann am besten durch ein Diagramm ausgedrückt und interpretiert werden.



Da im Tropfen durch die Reflektion der Winkel β_0 insgesamt viermal vorkommt, lässt sich der Differenzwinkel δ_0 sehr einfach errechnen:

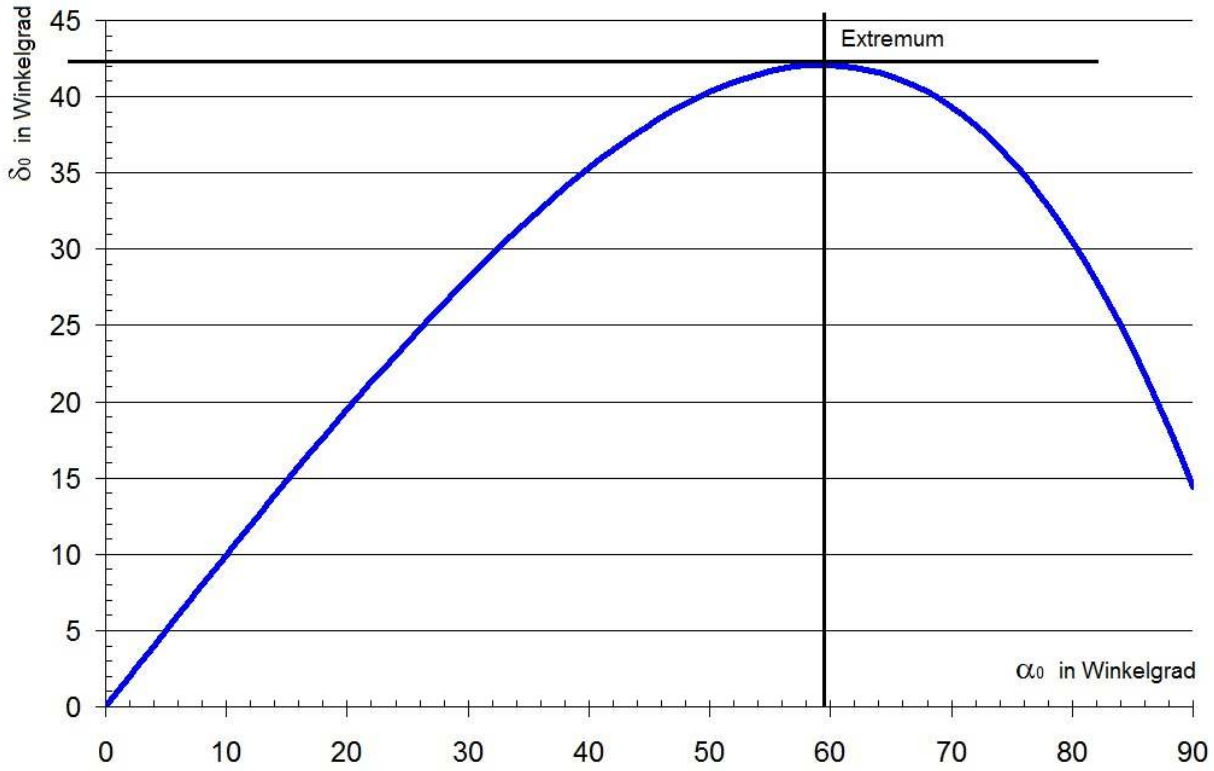
Beispielrechnungen werden mit dem Brechungsindex von Wasser = n_W und von Luft = n_L sowie dessen Verhältnis n_W / n_L von ca. 1,333 durchgeführt (gilt dann für Wellenlängen von etwa 625 nm / rot-orange Licht)

$$\delta_0 = -\alpha_0 + 4 \cdot \beta_0 - \alpha_0 = 4 \cdot \beta_0 - 2 \cdot \alpha_0$$

$$\frac{\sin(\alpha_0)}{\sin(\beta_0)} = \frac{n_W}{n_L} \quad \rightarrow \quad \beta_0 = \arcsin\left(\frac{n_L}{n_W} \cdot \sin(\alpha_0)\right)$$

$$\underline{\underline{\delta_0 = 4 \cdot \arcsin\left(\frac{n_L}{n_W} \cdot \sin(\alpha_0)\right) - 2 \cdot \alpha_0}}$$

Das wäre die Gleichung zur Bestimmung des Differenzwinkels zwischen einfallendem und austretendem Strahl für den Problemfall, dass im Tropfen nur eine einmalige Reflektion stattfindet. Bei mehrmaliger Reflektion innerhalb des Tropfens, worauf wir später noch zurückkommen werden, wird die Indizierung der Winkelparameter entsprechend höher gesetzt auf z.B. α_1 , α_2 , β_1 , β_2 etc., um diese Fälle besser unterscheiden zu können.



Am Diagramm ist zu erkennen, dass anfänglich mit ansteigendem Eintrittswinkel α_0 ein ungefähr linearer Anstieg erfolgt, dann ab etwa $\alpha_0 = 30°$ die Differenzwinkel immer weniger ansteigen, also immer dichter zueinander stehen, bis kurz vor $\alpha_0 = 60°$ das Maximum erreicht wird. Um diesen Winkel herum befinden sich viele der austretenden Strahlen mit dem ungefähren Winkel $\delta_0 = 42°$ (für die Wellenlänge 625nm), sodass hier in der Summation der Intensitäten der Lichtstrahlen eine Verstärkung zu erwarten ist.
Dieser extremale Winkel von δ_0 ist für jede Lichtfrequenz bzw. Wellenlänge ein anderer. Er schwankt im Bereich des sichtbaren Lichts zwischen 40° (violettes Licht mit $\lambda = 375$nm) und 42,5° (rotes Licht mit $\lambda = 700$nm). Wird der Eintrittswinkel α_0 größer als 60°, dann nimmt die Kurve wieder ab und endet mit dem Grenz-Differenzwinkel $\delta_0 = 14{,}4°$, wenn der Lichtstrahl den Tropfen oberflächlich tangiert. Bei diesem tangential anliegenden Grenzwinkel würde das Licht zum Einen eher die Tendenz einer Reflektion vom Tropfen weg besitzen und zum Anderen, wenn denn doch Lichtstrahlen in den Tropfen hineingebrochen werden, die Eigenschaft einer Totalreflexion im Innern aufweisen. Beide Effekte zusammen lassen daher kaum vermuten, dass im Grenzbereich von $\alpha_0 = 90°$ überhaupt noch Lichtstrahlen mit dem Austrittswinkel $\delta_0 = 14{,}4°$ zum Beobachter gelangen werden. - In diesem Zusammenhang soll schon mal die Lichterscheinung "Glorie" angesprochen werden, bei welcher das Licht tatsächlich wieder direkt zum Betrachter zurückgestreut wird. Dieses Phänomen wird aber später im Kapitel 4.3. noch einmal kurz angerissen. **#3)**

Diese Interpretation der Kurve legt uns Nahe, die verschiedenen Lichtfrequenzen (Farben des Regenbogens) im Extremum dieser Darstellung zu suchen. D.h., zur Berechnung des Differenzwinkels δ_0 (vom Hauptbogen), unter welchem der Regenbogen erscheint, wäre der maximale Wert als Lösung anzusehen. Das ist also eine typische Extremwertaufgabe, die mittels der Differentiation der Funktion $\delta_0(\alpha_0)$ gelöst werden kann. Im ersten Schritt wird eine Bestimmungsgleichung für den Winkel α_0 aufgestellt, die zum Extremum von δ_0 gehört, und dann der maximale Winkel $\delta_{0\,extr.}$ berechnet.

#3) weitere Ausführung zum Tunneleffekt am Tropfen werden im Kapitel 4.3 behandelt

$$\delta_0 = 4 \cdot \arcsin\left(\frac{n_L}{n_W} \cdot \sin(\alpha_0)\right) - 2 \cdot \alpha_0 \quad : Extremum \quad gesucht$$

$$\frac{d\delta_0(\alpha_0)}{d\alpha_0} = \frac{d\left[4 \cdot \arcsin\left(\frac{n_L}{n_W} \cdot \sin(\alpha_0)\right) - 2 \cdot \alpha_0\right]}{d\alpha_0} = 0$$

$$mit \quad z = \frac{n_L}{n_W} \cdot \sin(\alpha_0) \quad \rightarrow \quad \frac{d\delta_0(\alpha_0)}{d\alpha_0} = 4 \cdot \frac{d[\arcsin(z)]}{dz} \cdot \frac{dz}{d\alpha_0} - 2 = 0$$

$$\cdots = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{n_L}{n_W} \cdot \cos(\alpha_0) - 2 = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left[\frac{n_L}{n_W} \cdot \sin(\alpha_0)\right]^2}} \cdot \frac{n_L}{n_W} \cdot \cos(\alpha_0) - 2$$

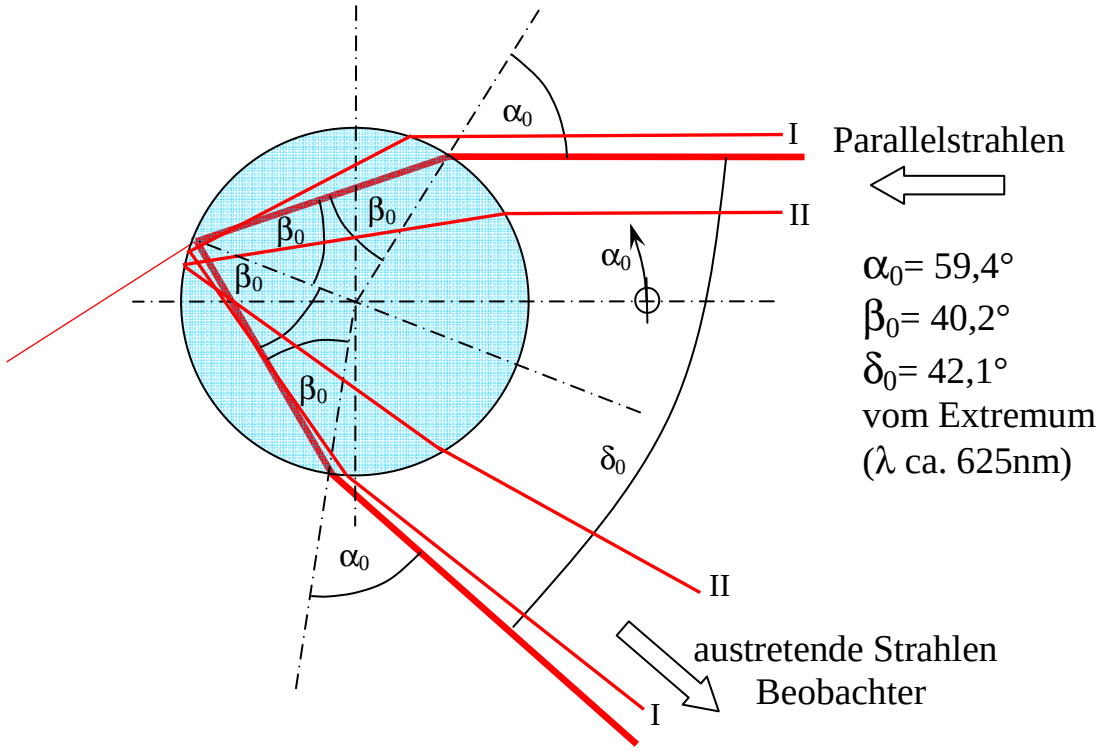
$$\cdots = \frac{4 \cdot \cos(\alpha_0)}{\sqrt{\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 - [\sin(\alpha_0)]^2}} - 2 = 0 \quad bzw. \quad \underline{\underline{\frac{2 \cdot \cos(\alpha_0)}{\sqrt{\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 - [\sin(\alpha_0)]^2}} - 1 = 0}}$$

Diese Bestimmungsgleichung kann aber auch durch den Winkel β_0 ausgedrückt werden, wenn statt α_0 die Winkelbeziehung $\alpha_0(\beta_0)$ eingesetzt wird.

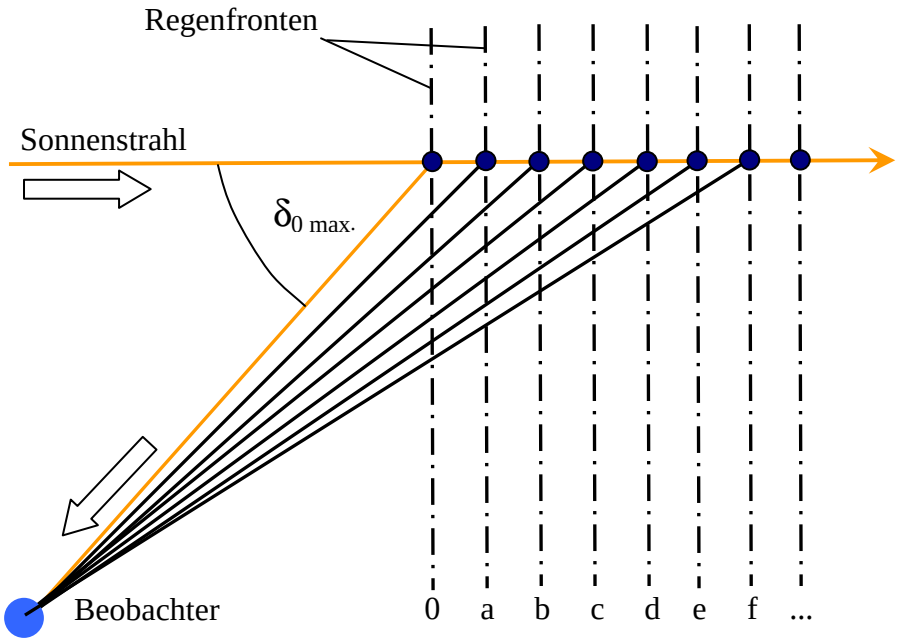
$$\sin(\alpha_0) = \frac{n_W}{n_L} \cdot \sin(\beta_0) \quad und \quad \cos(\alpha_0) = \sqrt{1-\left[\frac{n_W}{n_L} \cdot \sin(\beta_0)\right]^2}$$

$$\rightarrow \frac{2 \cdot \cos(\alpha_0)}{\sqrt{\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 - [\sin(\alpha_0)]^2}} - 1 = \frac{2 \cdot \sqrt{1-\left[\frac{n_W}{n_L} \cdot \sin(\beta_0)\right]^2}}{\sqrt{\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 - \left[\frac{n_W}{n_L} \cdot \sin(\beta_0)\right]^2}} - 1 = \frac{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2 - [\sin(\beta_0)]^2}}{\sqrt{1-[\sin(\beta_0)]^2}} - 1$$

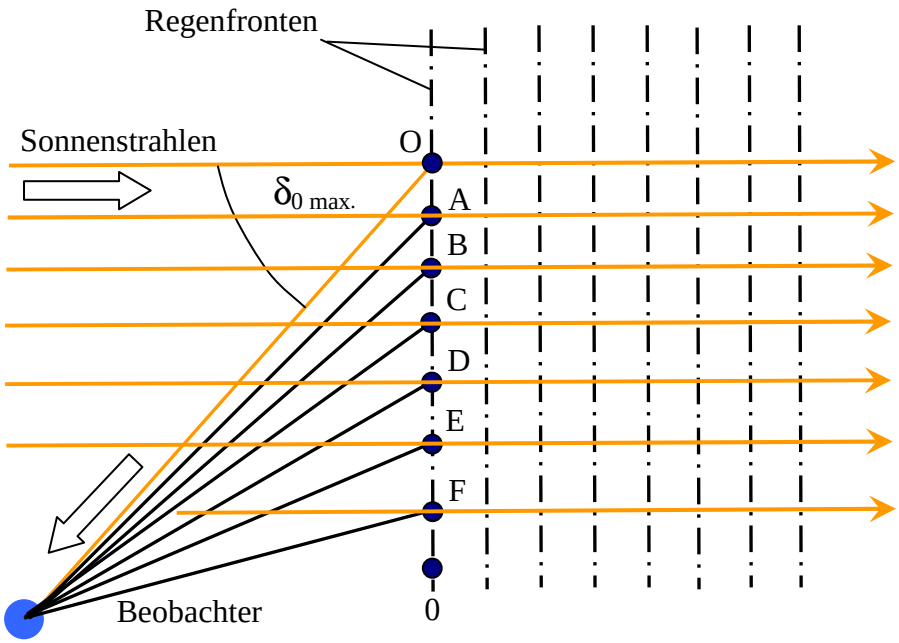
$$\cdots = \frac{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2 - [\sin(\beta_0)]^2}}{\cos(\beta_0)} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\cos(\beta_0)}{\sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2 - [\sin(\beta_0)]^2}} - 2 = 0}}$$



Beim Beobachter treffen demnach die Strahlen mit dem maximalen Winkel δ_0 ein und zeigen unter diesem Winkel eine höhere Lichtintensität als bei den restlichen Winkellagen, die sich ihrerseits durch Interferenzen größtenteils auslöschen.
Am besten führt man sich das bildhaft vor Augen, indem viele Regenfronten (Schichten) betrachtet werden, die von einem Sonnenstrahl geschnitten werden, wodurch eine Tropfenlinie entlang des Strahls gebildet wird (0, a, b, c, d, e, f ...). Und jeder Tropfen auf dieser Linie strahlt das austretende Licht unter einem anderen Winkel in Richtung Beobachter ab. Es darf aber nicht vergessen werden, dass diese Betrachtung vorerst nur eine einzige Wellenlänge des Lichts zum Gegenstand hat.

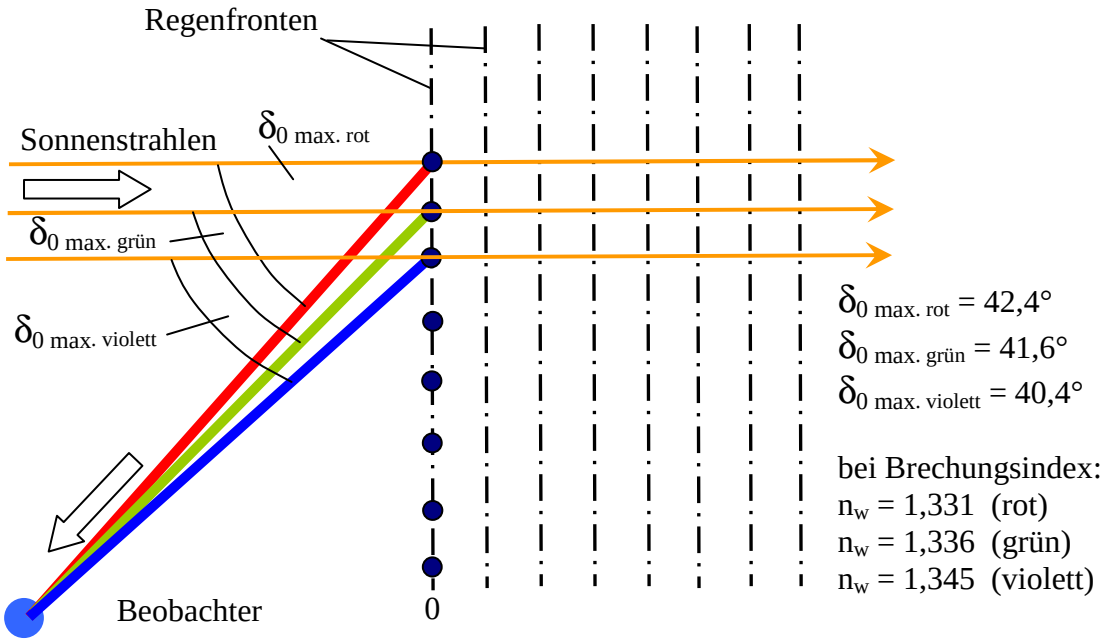


In ähnlicher Weise kann man sich auch in vertikaler Richtung eine Reihe von Tropfen anschauen, die durch mehrere Parallelstrahlen der Sonne in der vordersten Schicht "0" getroffen werden. Die Tropfenlinie wird dieses mal mit Großbuchstaben gekennzeichnet (O, A, B, C, D, E, F).

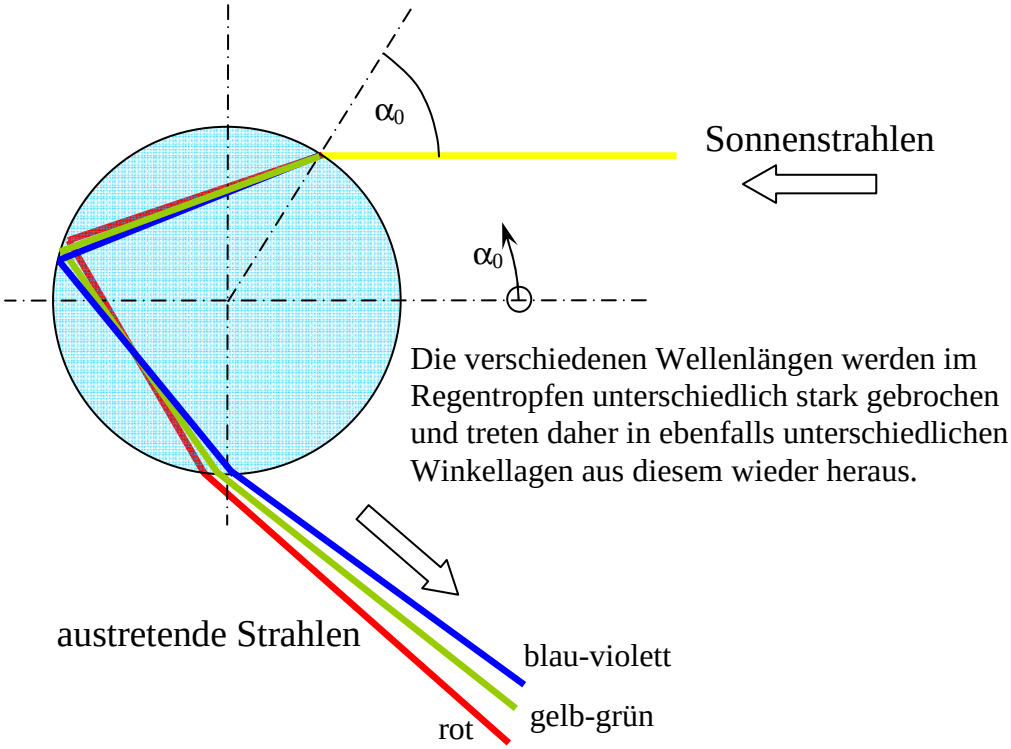


Sowohl in der ersten Betrachtung (horizontale Tropfenlinie) als auch in der zweiten (Tropfenlinie vertikal) zeigt der Tropfen in der Schicht "0" mit der Bezeichnung O mit dem maximalen Winkel $\delta_{0\ max.}$ in Richtung des Beobachters. In diesem engem Winkelbereich erfährt der Beobachter eine verstärkte Lichtintensität der entsprechend einstrahlenden Wellenlänge der Sonne. Bei den restlichen Winkellagen (A...F oder a...f) überlagern sich die Lichtwellen und interferieren miteinander, sodass es zur gegenseitigen Auslöschung kommt. Denn diese Lichtstrahlen haben allesamt sehr unterschiedliche Weglängen zurückzulegen (Gangunterschiede) und sind dementsprechend zueinander phasenverschoben. Als Restbetrag bleibt daher vornehmlich das Licht mit höherer Intensität übrig, welches unter dem Winkel $\delta_{0\ max.}$ zum Betrachter strahlt.

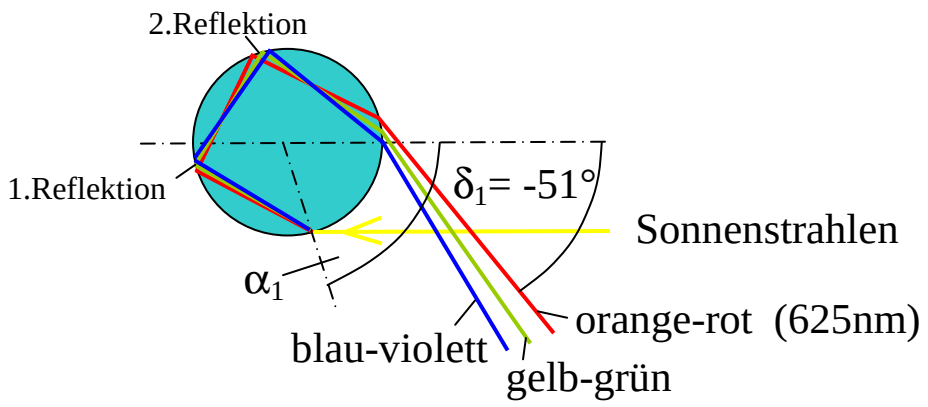
So bekommen wir ein Verständnis dafür, warum der extremale Winkel $\delta_{0\ max.}$ ausgerechnet der sein müsste, der sich beim Phänomen des Regenbogens zeigt. Das wären dann alle Lichtstrahlen auf der Mantelfläche eines Kegels, dessen Spitzenwinkel 2-mal $\delta_{0\ max.}$ groß ist. Und die Lichtstrahlen auf diesem speziellen Kegelmantel haben alle ein und dieselbe Wellenlänge bzw. Farbe.
Das führt uns nun zum nächsten Schritt, auch die anderen Lichtfrequenzen zu betrachten. Wie in dem Kapitel 2.3.1 schon angeführt, werden die verschiedenen Wellenlängen an der Grenzfläche zu einem anderen Medium (wie z.B. beim Übergang von Luft zum Wassertropfen) unterschiedlich stark gebrochen. Das führt bei einem Regentropfen dazu, dass sich die Wellenlängen des Sonnenspektrums im Tropfen auffächern und letztendlich mit unterschiedlichen Austrittswinkeln δ_0 den Tropfen verlassen. Wellenlängen um 400 nm (violett) werden so gebrochen, dass der Winkel $\delta_{0\ max.}$ bei ca. 40° liegt, also etwas flacher ins Auge des Betrachters fällt. Darum ist der blau-violette Bogen innen und der rote Bogen außen, wenn sich ein Regenbogen zeigt. Die verschiedenen Winkellagen der Wellenlängen (400nm ...700nm) sollen mit folgender Skizze veranschaulicht werden.



Das was dem Betrachter des Regenbogens als Farbenspiel ins Auge fällt, sind die durch Dispersion aufgefächerten Wellenlängen des Sonnenspektrums beim entsprechend maximalen Differenzwinkel $\delta_{0\ max.}$.



Das wäre nun das einfache Erklärungsmodell für den Hauptbogen. In der Regel zeigt sich aber beim Schauspiel eines Regenbogens auch ein Nebenbogen, der sich dem Hauptbogen anschließt. Er ist das Resultat einer weiteren Reflektion innerhalb des Tropfens.



Da zur Berechnung des Nebenbogens im Regentropfen eine weitere Reflektion hinzukommt, ergänzt sich die Winkelsumme um den weiteren Betrag von 2-mal β_1. In diesem Fall tritt der Sonnenstrahl, der letztendlich für den extremalen Differenzwinkel δ_1 verantwortlich wäre, unterhalb der Tropfenmitte ein. Wenn wir nach bekanntem Muster die Winkel addieren, dann muss von dieser Summe der Winkel 180° bzw. π rad abgezogen werden. Es kommt dieses mal also ein negativer Wert heraus. Der Differenzwinkel errechnet sich daher wie folgt:

$$\delta_1 = -\alpha_1 + 6\cdot\beta_1 - \alpha_1 - \pi = 6\cdot\beta_1 - 2\cdot\alpha_1 - \pi$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta_1)} = \frac{n_W}{n_L} \quad \rightarrow \quad \beta_1 = \arcsin\left(\frac{n_L}{n_W}\cdot\sin(\alpha_1)\right)$$

$$\delta_1 = 6\cdot\arcsin\left(\frac{n_L}{n_W}\cdot\sin(\alpha_1)\right) - 2\cdot\alpha_1 - \pi \quad : \textit{Extremum} \quad \textit{gesucht}$$

$$\frac{d\delta_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} = \frac{d\left[6\cdot\arcsin\left(\frac{n_L}{n_W}\cdot\sin(\alpha_1)\right) - 2\cdot\alpha_1 - \pi\right]}{d\alpha_1} = 0$$

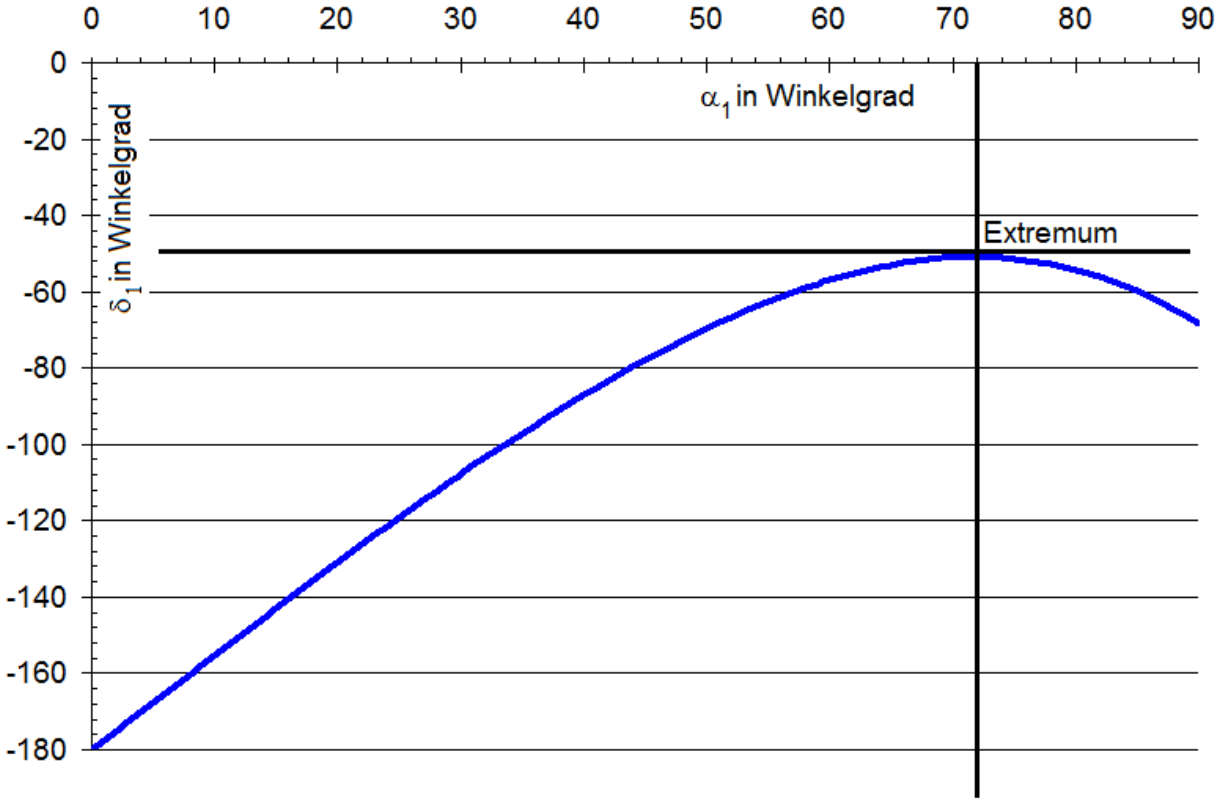
$$\cdots = \frac{6\cdot\cos(\alpha_1)}{\sqrt{\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 - [\sin(\alpha_1)]^2}} - 2 = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \underline{\underline{\frac{3\cdot\cos(\alpha_1)}{\sqrt{\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 - [\sin(\alpha_1)]^2}} - 1 = 0}}$$

Setzt man erneut die Winkelbeziehung $\alpha_1(\beta_1)$ ein, dann resultiert daraus wieder eine direkte Abhängigkeit zum Winkel β_1 .

$$\sin(\alpha_1) = \frac{n_W}{n_L} \cdot \sin(\beta_1) \quad \textit{und} \quad \cos(\alpha_1) = \sqrt{1 - \left[\frac{n_W}{n_L} \cdot \sin(\beta_1)\right]^2}$$

$$\rightarrow \frac{3 \cdot \cos(\alpha_1)}{\sqrt{\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 - [\sin(\alpha_1)]^2}} - 1 = \cdots = \frac{3 \cdot \sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2 - [\sin(\beta_1)]^2}}{\cos(\beta_1)} - 1 = 0$$

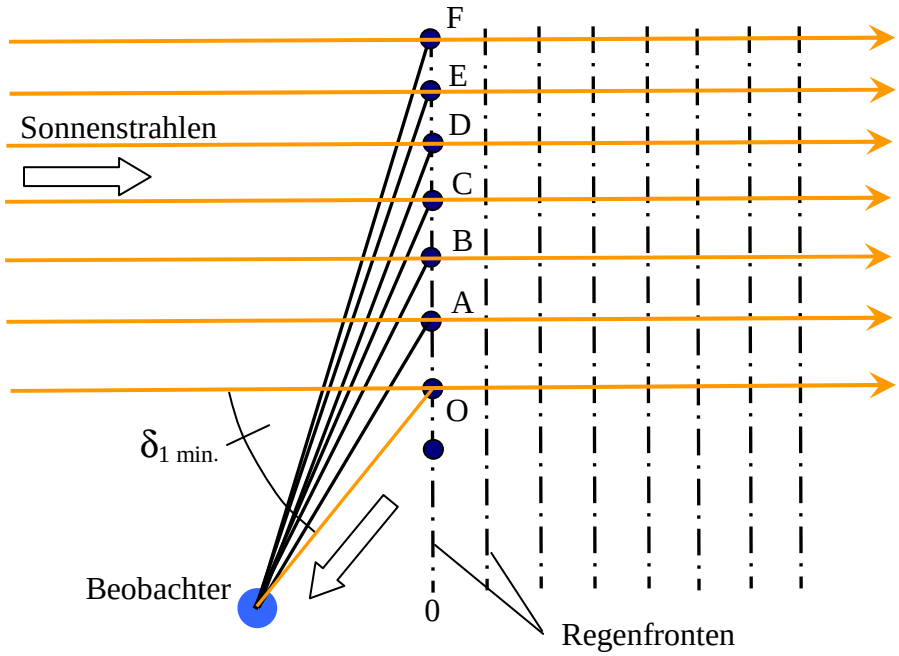
$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\cos(\beta_1)}{\sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2 - [\sin(\beta_1)]^2}} - 3 = 0}} \qquad : \textit{Bestimmungsgleichung} \quad \textit{für} \quad \beta_1$$



Bei einer Wellenlänge von 625nm (n_w=1,333) ergeben sich über die Bestimmungsgleichung die folgenden Werte:

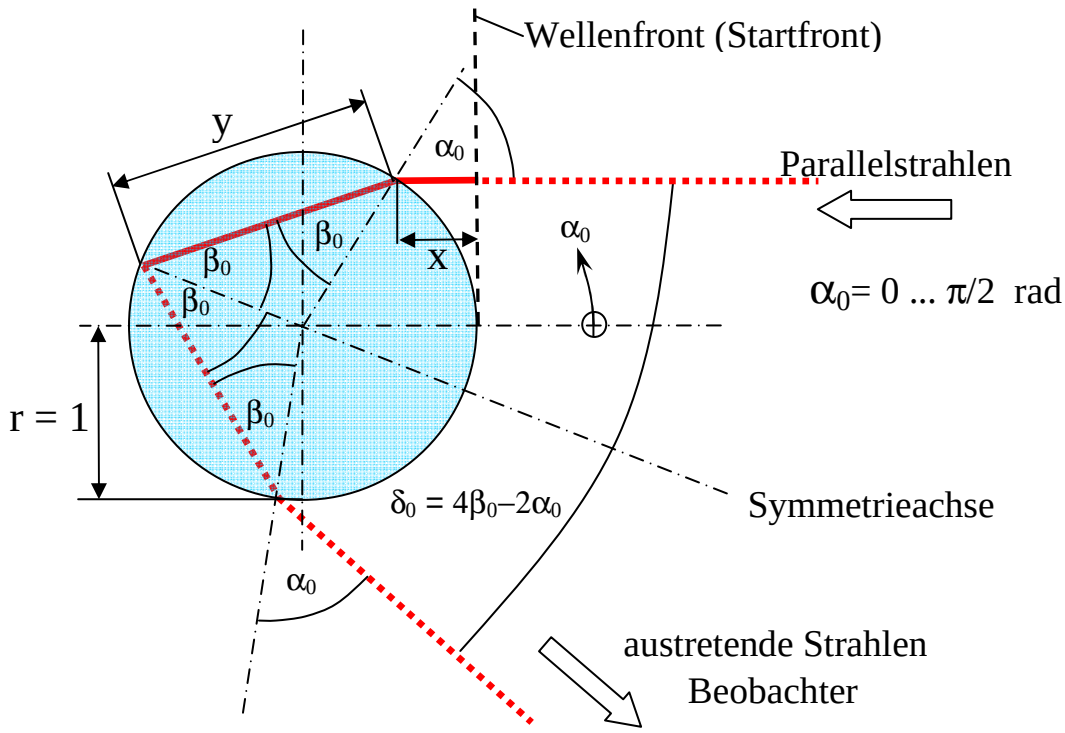
α_1 = 71,8° β_1 = 45,5 δ_1 = -50,9°

Damit wäre auch die Winkelposition des Nebenbogens über die Aussage des extremalen Differenzwinkels bestimmt worden (bzgl. der Wellenlänge 625nm). Und in ähnlicher Weise können wir anführen, dass sich sämtliche Lichtstrahlen der Winkellagen A...F überlagern und durch Interferenz weitestgehend ausgelöscht werden. Am Punkt O befinden wir uns wieder in einer Randzone, wo unter dem Winkel $\delta_{1\ min.}$ sehr viele Lichtstrahlen eng beieinander stehen und somit für eine höhere Lichtintensität sorgen, die jedoch nicht mehr so stark wie die vom Hauptbogen ist (nur noch etwa 43% davon bzgl. λ = 700nm).



Worüber wir bei diesen Betrachtungen und Berechnungen noch nicht gesprochen haben, ist die Fragestellung, was das eventuell mit dem Prinzip der kürzesten Zeit zu tun haben könnte? Die Suche nach den extremalen Winkellagen ist ja nicht selbstverständlich damit gleichzusetzen, dass es sich hier um Lichtpfade handelt, die sich gemäß des Fermat'schen Prinzips verhalten. Daher prüfen wir im nächsten Schritt nach, welche Winkellagen sich ergeben, wenn die Lichtpfade herausgegriffen werden, die in der kürzesten Zeit ihren Weg durch den Regentropfen nehmen.

Die Vorgehensweise wäre in diesem Fall so zu wählen, dass man vertikal zum eintreffenden Sonnenstrahl eine Tangente an den Regentropfen anlegt (siehe folgende Skizze). Diese Vertikale bildet die Startfront der Lichtwellen von der aus der Weg x in der Luft zurückzulegen ist, bis der Strahl am Tropfen eintrifft. Das Licht wird dann in den Tropfen gebrochen und legt dann eine Strecke y zurück bis zur Reflektion. Dieser Reflektionspunkt ist aber zugleich ein Punkt auf der Symmetrieachse der geometrischen Betrachtung dieses Problems, sodass es reicht, allein die Zeitverläufe der Strecken x und y zu addieren. Nach dem Prinzip von Fermat müsste es zumindest einen Lichtpfad geben, der bis zum Reflektionspunkt die geringste Zeit benötigt.
Um die Betrachtung am Tropfen geometrisch auf einen einfachen Problemfall zu normieren, nehmen wir an, dass der Radius vom Tropfen r = 1 ist. Des weiteren soll die Zeit t_1 entlang der Strecke x ebenfalls durch die Strecke selbst ausgedrückt werden, d.h. t_1 entspricht x. Wenn dieses vorausgesetzt wird, dann pflanzt sich das Licht entlang der Strecke y innerhalb der Zeit t_2 fort, was dann dem Wert y multipliziert mit n_W/n_L entspräche.



$$x = 1 - \cos\alpha_0 = 1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha_0}$$

$$\beta_0 = \arcsin\left(\frac{n_L}{n_W} \cdot \sin\alpha_0\right) \quad bzw. \quad \alpha_0 = \arcsin\left(\frac{n_W}{n_L} \cdot \sin\beta_0\right)$$

aus dem Sinussatz folgt:

$$\frac{\sin\beta_0}{1} = \frac{\sin(\pi - 2\cdot\beta_0)}{y} = \frac{\sin(2\cdot\beta_0)}{y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\sin(2\beta_0)}{\sin\beta_0}$$

mit den Zeitdistanzen:

$$t_1 = x \cdot \frac{n_L}{n_L} = x \qquad\qquad t_2 = y \cdot \frac{n_W}{n_L}$$

gefordert wird das Minimum der beiden addierten Zeitdistanzen:

$$t_1 + t_2 = x + y \cdot \frac{n_W}{n_L} = Extremum_{\min.}$$

$$x = 1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 \cdot \sin^2\beta_0}$$

$$y = \frac{\sin(2\beta_0)}{\sin\beta_0} = \frac{2\cdot\cos\beta_0\cdot\sin\beta_0}{\sin\beta_0} = 2\cdot\cos\beta_0$$

$$F(\beta_0) = t_1(\beta_0) + t_2(\beta_0) = x + y\cdot\frac{n_W}{n_L} = Extremum_{\min.}$$

$$F(\beta_0) = 1 - \sqrt{1-\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2\cdot\sin^2\beta_0} + \frac{n_W}{n_L}\cdot 2\cdot\cos\beta_0 = Extremum_{\min.}$$

$$\Rightarrow \frac{dF(\beta_0)}{d\beta_0} = 0$$

Substitution und Anwendung der Kettenregel:

$$z_2 = \frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_0 \qquad z_1 = 1 - z_2^2 \qquad z_0 = 1 - \sqrt{z_1}$$

$$\frac{dF(\beta_0)}{d\beta_0} = \frac{dz_0}{d\beta_0} + \frac{d\left(\frac{n_W}{n_L}\cdot 2\cdot\cos\beta_0\right)}{d\beta_0} = \frac{dz_0}{dz_1}\cdot\frac{dz_1}{dz_2}\cdot\frac{dz_2}{d\beta_0} + \frac{d\left(\frac{n_W}{n_L}\cdot 2\cdot\cos\beta_0\right)}{d\beta_0} = 0$$

$$\cdots = \left(\frac{-1}{2\cdot\sqrt{z_1}}\right)\cdot(-2\cdot z_2)\cdot\frac{n_W}{n_L}\cdot\cos\beta_0 - 2\cdot\frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_0 = \frac{z_2}{\sqrt{z_1}}\cdot\frac{n_W}{n_L}\cdot\cos\beta_0 - 2\cdot\frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_0$$

$$\cdots = \frac{\frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2\cdot\sin^2\beta_0}}\cdot\frac{n_W}{n_L}\cdot\cos\beta_0 - 2\cdot\frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_0 = 0$$

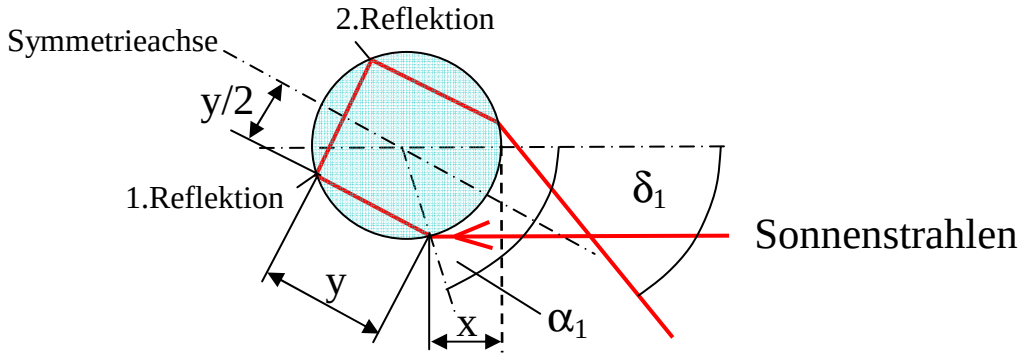
$$\cdots = \frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_0\cdot\left[\frac{\frac{n_W}{n_L}\cdot\cos\beta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2\cdot\sin^2\beta_0}} - 2\right] = \frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_0\cdot\left[\frac{\cos(\beta_0)}{\sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2 - \sin^2\beta_0}} - 2\right] = 0$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\cos(\beta_0)}{\sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2 - \sin^2\beta_0}} - 2 = 0}} \qquad : Bestimmungsgleichung \quad für \quad \beta_0$$

Wir erkennen hier sofort, dass es sich um die identische Bestimmungsgleichung handelt, die sich zuvor bei der Ableitung des extremalen Differenzwinkels δ_0 ergeben hat.

Das ist nun eine äußerst interessante Erkenntnis, die wir hier gewinnen konnten, dass nämlich die Lichtpfade mit der geringstmöglich benötigten Zeit mit den Winkellagen δ_0 gleichzusetzen sind, die als extremal vorausgesetzt wurden.
Sieht man sich die Bestimmungsgleichungen für die höheren Ordnungen an, also für den Hauptbogen und Nebenbogen und weitere Bogenordnungen, dann kann eine allgemeine Gleichung abgeleitet werden.

Da die Problembetrachtung stets symmetrisch bleibt, muss man je höherer Ordnung nur die Wegstrecke von y/2 weiter hinzuaddieren, die in die Summe der Zeitdistanzen eingeht.



Für den Hauptbogen gilt: (Ordnung k = 0)

$$F(\beta_0) = t_1(\beta_0) + t_2(\beta_0) = x + y \cdot \frac{n_W}{n_L} \cdot (1) = Extremum$$

Für den 1.Nebenbogen gilt dann: (Ordnung k = 1)

$$F(\beta_1) = t_1(\beta_1) + t_2(\beta_1) = x + y \cdot \frac{n_W}{n_L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = Extremum$$

Für den 2.Nebenbogen gilt dann: (Ordnung k = 2)

$$F(\beta_2) = t_1(\beta_2) + t_2(\beta_2) = x + y \cdot \frac{n_W}{n_L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = Extremum$$

Die allgemeine Gleichung bzgl. der Ordnungen k ist somit:

$$F(\beta_k) = t_1(\beta_k) + t_2(\beta_k) = x + y \cdot \frac{n_W}{n_L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot k\right) = Extremum$$

$$\underline{\underline{F(\beta_k) = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2 \cdot \sin^2 \beta_k} + \frac{n_W}{n_L} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot k\right) \cdot 2 \cdot \cos \beta_k = Extremum}}$$

Das ergibt für die Ableitungen nach $d\beta_k$ folgende Ausdrücke:

$$\frac{dF(\beta_k)}{d\beta_k}=0 \qquad \rightarrow \frac{d\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{n_W}{n_L}\right)^2\cdot\sin^2\beta_k}+\frac{n_W}{n_L}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot k\right)\cdot 2\cdot\cos\beta_k\right)}{d\beta_k}=0$$

$$\rightarrow \frac{\cos(\beta_k)}{\sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2-\sin^2\beta_k}}-(2+k)=0 \qquad : Bestimmungsgleichung \quad für \quad \beta_k$$

D.h., für den Nebenbogen bzw. die 1.Ordnung (k = 1) müsste die Bestimmungsgleichung folgendermaßen lauten:

$$\frac{\cos(\beta_1)}{\sqrt{\left(\frac{n_L}{n_W}\right)^2-\sin^2\beta_1}}-(3)=0 \qquad : Bestimmungsgleichung \quad für \quad \beta_1$$

Und wie man sieht, spiegelt dieses Ergebnis die identische Aussage wider, wie sie auch bei der Suche nach dem extremalen Differenzwinkel gefunden wurde.

Das Phänomen der Regenbogenfarben beruht daher nicht allein auf der Tatsache, dass sich die gebrochenen Lichstrahlen gemäß des Fermat'schen Prinzips verhalten, sondern dass aus all jenen gebrochenen Lichtstrahlen sich uns die als Regenbogenfarbe zeigen werden, die wiederum von allen Lichtpfaden die kürzeste Zeit benötigen. Man könnte beinahe sagen, dass die Lichtstrahlen für die beobachteten Regenbogenfarben sogar in einer weiteren zweiten Disziplin dem "Prinzip der kürzesten Zeit" gehorchen.

Für die extremalen Differenzwinkel δ_k lauten die Gleichungen somit:

$$\alpha_k=\arcsin\left(\frac{n_W}{n_L}\cdot\sin\beta_k\right) \qquad : Gleichung \quad für \quad \alpha_k$$

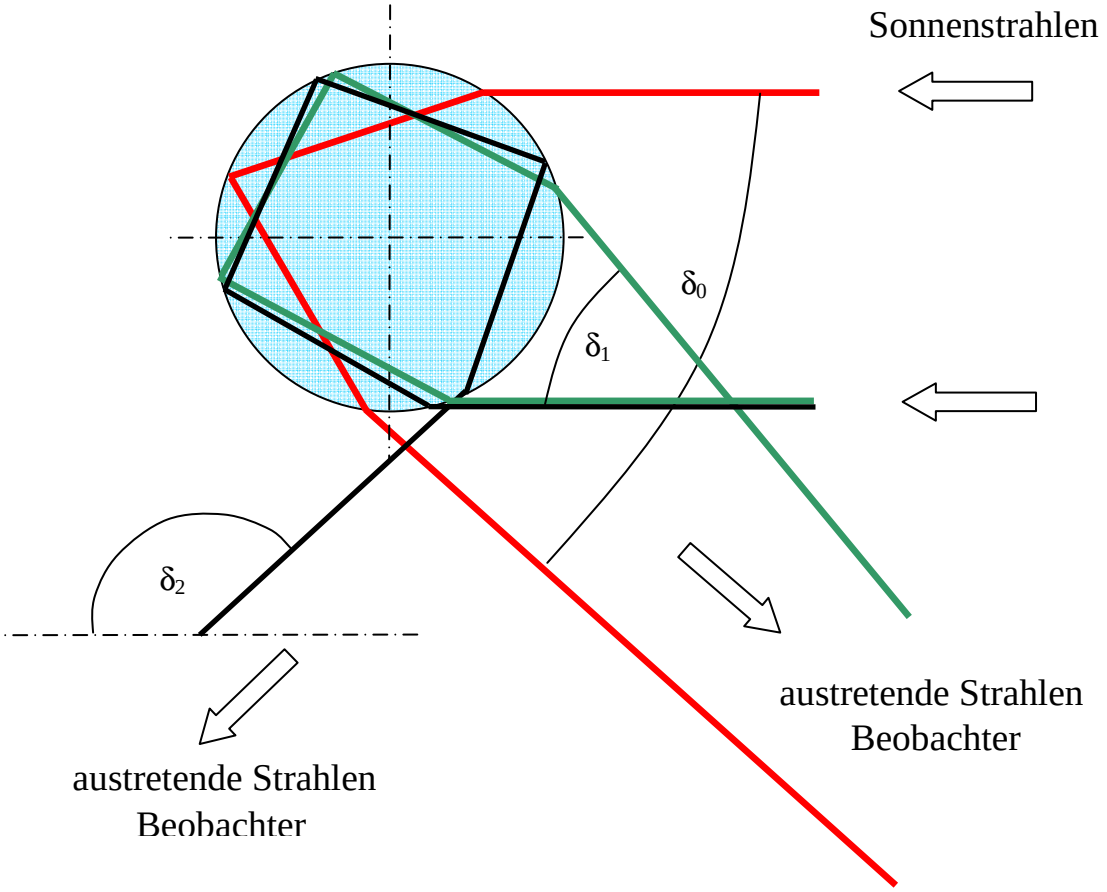
$$\delta_0=4\cdot\beta_0-2\cdot\alpha_0 \qquad : Gleichung \quad für \quad Differenzwinkel \quad \delta_0$$

$$\delta_1=6\cdot\beta_1-2\cdot\alpha_1-\pi \qquad : Gleichung \quad für \quad Differenzwinkel \quad \delta_1$$

$$\delta_2=8\cdot\beta_2-2\cdot\alpha_2-2\pi \qquad : Gleichung \quad für \quad Differenzwinkel \quad \delta_2$$

Tabelle der verschiedenen Winkel in Abhängigkeit vom Brechungsindexverhältnis n_W/n_L:

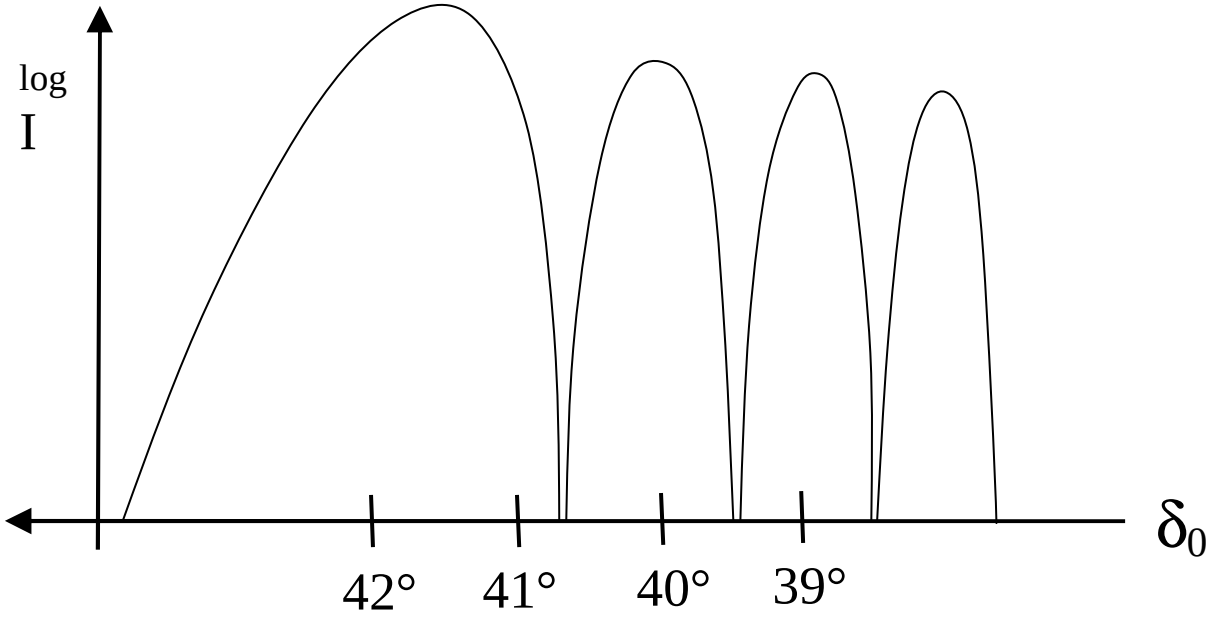
n_W/n_L	β_0	β_1	β_2	α_0	α_1	α_2	δ_0	δ_1	δ_2
	rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad
	Winkelgrad	Winkelgrad	Winkelgrad	Winkelgrad	Winkelgrad	Winkelgrad	Winkelgrad	Winkelgrad	Winkelgrad
1,331	0,704342	0,795432	0,820867	1,038937	1,255018	1,342008	0,739493	-0,879037	-2,400266
	40,356	45,575	47,032	59,527	71,907	76,891	42,370	-50,365	-137,525
1,336	0,698639	0,790687	0,816358	1,033867	1,252206	1,340001	0,726822	-0,901882	-2,432324
	40,029	45,303	46,774	59,236	71,746	76,776	41,644	-51,674	-139,362
1,345	0,688505	0,782280	0,808376	1,024762	1,247170	1,336418	0,704495	-0,942253	-2,489013
	39,448	44,821	46,317	58,715	71,458	76,571	40,365	-53,987	-142,610



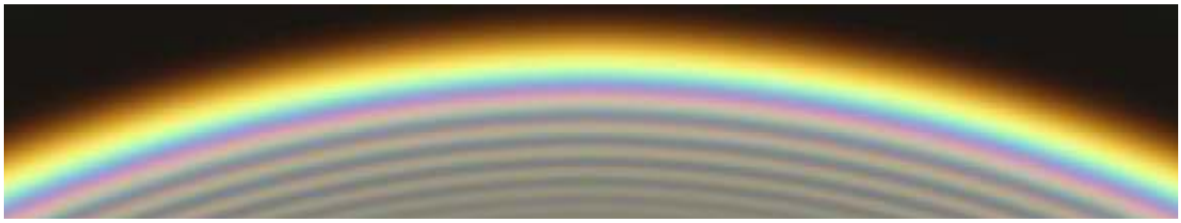
Die obige Skizze zeigt noch einmal, wie die Strahlengänge hinsichtlich der ersten Ordnungen innerhalb des Tropfens verlaufen. Der Hauptbogen (Ordnung 0) wird durch den roten Lichtpfad dargestellt, der Strahl des ersten Nebenbogens (Ordnung 1) ist grün gekennzeichnet. Beide Bögen zeigen sich dem Beobachter mit der Sonne im Rücken. Beim zweiten Nebenbogen (Ordnung 2), der hier schwarz dargestellt ist, hat der Beobachter eine andere Blickposition, nämlich in Richtung der Sonne schauend. Das hat insofern den großen Nachteil, dass die Sonnenstrahlen den Betrachter blenden werden. Darüber hinaus ist die Intensität des zweiten Nebenbogens äußerst schwach (nur noch 24% von der Intensität des Hauptbogens bzgl. λ = 700nm). D.h., dem Betrachter eines Regenbogens wird sich höchst selten auch das Schauspiel des zweiten Nebenbogens bieten. Hier spielen dann auch optimale Verhältnisse eine Rolle, die sich auf die Intensität und Farbkraft des Nebenbogens auswirken. Dazu zählt beispielsweise die Tropfengröße des Regens, die maßgeblich einen Einfluss auf die Sichtbarkeit des Regenbogens hat. Bei Tropfchengrößen unterhalb 0,050mm (Nebel) zeigt sich der Hauptbogen kaum noch mit besonderer Farbkraft, da die überlagerten Wellenlängen sich zu weißem Licht addieren oder die Farben nur noch sehr diffus vorliegen.

Sogar ein Gewitterdonner, derartige Beobachtungen soll es gegeben haben, kann einen Regenbogen zum Vibrieren bringen. Als Erklärung wird angeführt, dass die durch die Blitze ausgelösten Druckwellen, welche sich akustisch als Donner bemerkbar machen, beim Durchqueren der Regenfronten die dort befindlichen Tropfengrößen variieren und vergrößern lassen. So kann es denn vorkommen, dass Druckwelle und Blitz zeitversetzt agieren, da sich die Druckwelle nur mit der Schallgeschwindigkeit ausbreiten kann. Nach dem Blitzleuchten würde folglich der Regenbogen mitunter erst einige Sekunden später durch die Druckwelle betroffen sein und dafür sorgen, dass Farben des Spektrums ausgelöscht werden oder auch heller erscheinen. Das sind aber nur sehr vereinfachte Erklärungsmodelle, um die Vielzahl an Phänomenen rund um den Regenbogen veranschaulichen zu wollen.
Auch die in diesem Skript vorgestellten Methoden und Betrachtungen sind lediglich Modelltheorien, die einzig und allein das Faktum der verschiedenen Winkellagen für die Bögen zu erklären suchen. Sie geben ein vereinfachtes Bild der Natur wieder und reichen im Allgemeinen auch aus, die Grundphänomene nachzuempfinden bzw. vorhersagen zu können. Denn was nicht mehr so leicht über das einfache Erklärungsmodell von Descartes erklärt werden kann, sind beispielsweise die inneren Regenbögen, welche sich als Muster am inneren Hauptbogen zeigen. In sehr schwacher Form zeigte sich das ja bei den Fotografien vom Vorwort.

Um diese Interferenzen erklären zu können, muss man theoretisch noch weiter ausholen. Es ist in diesem Fall so, dass man sogar weiterhin mit dem schon bekannten Descartes'schen Strahlenmodell am Kugeltropfen arbeiten kann, jedoch jeden gebrochenen Lichtstrahl minutiös von der Phasenlage der Welle her betrachten und in die Berechnung der Interferenz eingehen lassen muss. Hier zeigt sich nämlich dann, dass eine anfangs ebene Wellenfront beim Brechungsvorgang in einen kubischen Kurvenverlauf deformiert wird. Das macht die Sache weitaus komplexer, wenn hierüber die Interferenz errechnet werden soll. Mathematisch wurde diese nun exakter angenäherte Modellvorstellung mit dem nach Airy benannten Integral beschrieben. Auch hier sind die Tropfengröße und die entsprechenden Wellenlängen wesentliche Parameter, die sich auf das Ergebnis auswirken. Das theoretische Gebäude für das erweiterte Modell, das zum Airy-Integral führt, wird mit diesem Skript nicht weiter erläutert. Es soll nur kurz anklingen, dass mittels dieser theoretischen Erweiterung auch die anderen Intensitätsmaxima an der Innenkante des Hauptbogens erklärt werden können.



Der Logarithmus der Intensität I aufgetragen über dem Differenzwinkel δ_0 vom Hauptbogen: Die Airy-Kurve leistet eine adäquate Vorhersage der Interferenzphänomene am Innenrand des Hauptbogens.

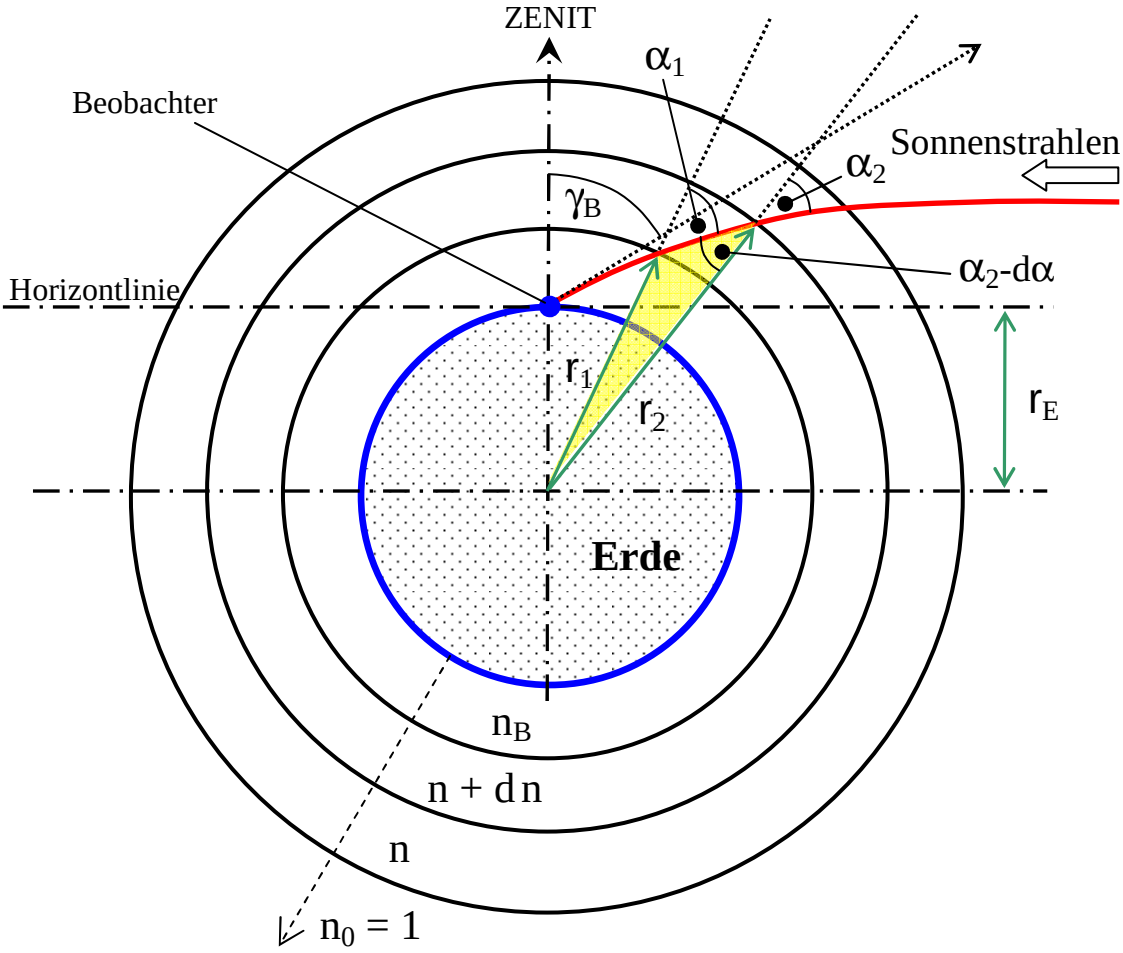


4. Anhang: Weitere theoretische Ergänzungen

4.1 Die Refraktionsgleichung:

Wenn ein Beobachter auf der Erdoberfläche zum Himmel schaut, dann erblickt er die dort am Firmament befindlichen Himmelskörper nicht an der realen bzw. wahren Position. Das Licht, das durch die Atmosphäre hindurch muss, wird dort gebrochen und verbiegt somit den Lichtstrahl, der zum Betrachter geht. Inwieweit die scheinbare von der wirklichen Position differiert, hängt davon ab, mit welchem Winkel das Licht auf die Schichten der Atmosphäre trifft. Ein Blick zum Horizont, dort wo beispielsweise die Morgen- oder Abendsonne steht, ergibt höhere Abweichungen, als wenn der Beobachter seinen Blick in Zenitrichtung fallen lässt. Die folgende Refraktionsgleichung soll uns eine Berechungsmöglichkeit geben, wie groß diese Winkelabweichung ausfallen kann, wenn die Sonne am Horizont untergeht. Sie soll aber auch die Winkeldifferenz liefern, die wichtig bei der Beobachtung des "Green Flash = Grünes Leuchten" sind. Denn der Winkelunterschied zwischen der "roten Sonnenscheibe" und der "grünen Sonnenscheibe" ist nämlich sehr klein, sodass Beobachtungen zu diesem Phänomens entscheidend von den atmosphärischen Bedingungen abhängen und dementsprechend relativ selten anzutreffen sind.

Wir starten mit einem Beobachter auf der Erdoberfläche, der seinen Blick in einem Winkel von γ_B (von der Zenitrichtung aus gemessen) zum Himmel richtet und von dort Lichtstrahlen der Sonne oder die eines Sterns wahrnimmt. Schaut der Beobachter direkt zum Horizont, dann kann der Winkel $\gamma_B = 90°$ gesetzt werden. Das wäre der Beobachtungswinkel, welcher die größte Winkelabweichung zwischen scheinbarer und wirklicher Position des Objekts ergeben würde.



Um das Problem in Angriff nehmen zu können, betrachten wir erst einmal das Brechungsgesetz in der Form, wie dieses sich verhält, wenn sich der Brechungsindex von der einen zur nächsten Atmosphärenschicht um den differentiell kleinen Betrag d n ändert.

$$\frac{\sin(\alpha_2 - d\alpha)}{\sin\alpha_2} = \frac{n}{n + dn} \qquad : \textit{Brechungsgesetz}$$

$$\rightarrow (n + dn)\cdot\sin(\alpha_2 - d\alpha) = n\cdot\sin\alpha_2$$

Mittels der Additionstheoreme der Winkelfunktionen kann man die Beziehung umformen in:

$$\rightarrow (n+dn)\cdot(\sin\alpha_2\cdot\cos d\alpha-\cos\alpha_2\cdot\sin d\alpha)=n\cdot\sin\alpha_2$$

$$mit\quad \sin d\alpha\approx d\alpha\quad und\quad \cos d\alpha\approx 1\quad resultiert:$$

$$(n+dn)\cdot(\sin\alpha_2-\cos\alpha_2\cdot d\alpha)-n\cdot\sin\alpha_2=0$$

$$dn\cdot\sin\alpha_2-n\cdot d\alpha\cdot\cos\alpha_2-dn\cdot d\alpha\cdot\cos\alpha_2=0\qquad mit\qquad dn\cdot d\alpha\cdot\cos\alpha_2<<1$$

$$\rightarrow dn\cdot\sin\alpha_2-n\cdot d\alpha\cdot\cos\alpha_2=0\qquad\Rightarrow d\alpha=\frac{dn}{n}\cdot\tan\alpha_2$$

Die Ausgangsgleichung zur Berechnung der Winkeldifferenz $\Delta\alpha$ ist daher:

$$\underline{\underline{d\alpha=\frac{dn}{n}\cdot\tan\alpha}}$$

D.h., die Summation der Winkelabweichungen entlang des Lichtstrahl wird über das Integral berechnet, dessen Intervallgrenzen durch die Brechungsindizes am Ort des Beobachters n_B und im leeren Raum (Vakuum) n_0 ausgedrückt werden.

$$\int_{n0}^{nB} d\alpha=\Delta\alpha=\int_{n0}^{nB}\frac{dn}{n}\cdot\tan\alpha(n)$$

Als nächstes greifen wir uns das gelbe Dreieck aus der obigen Skizze heraus, um hier den Sinussatz anzuwenden.

$$\frac{\sin(\alpha_2-d\alpha)}{r_1}=\frac{\sin(180°-\alpha_1)}{r_2}=\frac{\sin\alpha_1}{r_2}$$

Aus dem Brechungsgesetz hergeleitet wissen wir, dass Folgendes gilt:

$$(n+dn)\cdot\sin(\alpha_2-d\alpha)=n\cdot\sin\alpha_2\qquad\rightarrow\sin(\alpha_2-d\alpha)=\frac{n\cdot\sin\alpha_2}{(n+dn)}$$

Das wiederum eingesetzt in den Sinussatz ergibt:

$$\rightarrow\frac{n\cdot\sin\alpha_2}{(n+dn)\cdot r_1}=\frac{\sin\alpha_1}{r_2}\qquad\rightarrow r_2\cdot n\cdot\sin\alpha_2=(n+dn)\cdot r_1\cdot\sin\alpha_1$$

Setzt man nun für den Winkel α_1 den Startwinkel des Beobachters γ_B sowie den Erdradius r_E und den Brechungsindex n_B ein, dann erhalten wir eine Gleichung mit einer Startbedingung auf der rechten Seite der Gleichung:

$$r_2\cdot n\cdot\sin\alpha_2=n_B\cdot r_E\cdot\sin\gamma_B$$

In der allgemeinen Form beschrieben, resultiert damit der Ausdruck:

$$\sin\alpha = \frac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{r \cdot n}$$

Der Tangens vom Winkel α kann wiederum durch Sinusausdrücke formuliert werden:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \qquad \rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{r \cdot n}}{\sqrt{1-\left(\frac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{r \cdot n}\right)^2}}$$

Dieser Ausdruck kann nun in das Integral zur Berechnung der Winkelabweichung eingesetzt werden:

$$\Delta\alpha = \int_{n0}^{nB} \frac{dn}{n} \cdot \tan\alpha(n) = \int_{n0}^{nB} \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{r \cdot n}}{\sqrt{1-\left(\frac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{r \cdot n}\right)^2}} \cdot dn$$

Im Integral befinden sich jetzt noch die Variablen r und n. Zwischen diesen beiden Variablen ist daher noch eine Abhängigkeit herzustellen, um das Integral berechnen zu können.

Hier müssen nun weitere Annahmen getroffen werden, wie sich der Brechungsindex mit der Luftdichte ändert. Angenähert gilt für die Dichte von Gasmolekülen die proportionale Beziehung:

$$\delta \sim \frac{n^2-1}{n^2+2}$$

Wenn der Brechungsindex nur unwesentlich größer als 1 ist, dann kann diese Beziehung weiter vereinfacht werden in:

$$\delta \sim \frac{n^2-1}{n^2+2} \quad mit \quad n = 1+\varepsilon \quad und \quad \varepsilon << 1$$

$$\rightarrow \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2+2} \approx \frac{2\varepsilon}{3+2\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\frac{3}{2}+\varepsilon} \approx \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\frac{2}{3}\varepsilon = \frac{2}{3}\left[(1+\varepsilon)-1\right] = \frac{2}{3}\cdot(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\delta \sim (n-1)}}$$

Die Dichte der Luft δ ist also proportional zur Differenz (n-1), wenn der Brechungsindex n geringfügig größer als 1 ist. Davon können wir ausgehen, da der Brechungsindex von Luft hinsichtlich des sichtbaren Lichts nicht größer als 1.0003 ausfällt.

Um eine Beziehung zwischen der Dichte und dem Brechungsindex herstellen zu können, muss man sich den Druck- bzw. Dichteverlauf mit zunehmender Höhe h anschauen. Die Höhenabhängigkeit des Luftdrucks p(h) und der Luftdichte δ(h) kann bis zu einer Höhe von etwa 100 km durch die Aussage angenähert werden, dass der Logarithmus der Dichte / des Druckes mit steigender Höhe h linear abnimmt. D.h., bezogen auf eine Referenzdichte δ(0) oder einen Referenzdruck p(0) kann man den Verlauf über eine Exponentialfunktion ausdrücken. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$p(h) \approx p(0) \cdot e^{-h/H} \qquad mit \qquad p(0) = 1013{,}25 mbar \qquad Normaldruck$$

$$\delta(h) \approx \delta(0) \cdot e^{-h/H}$$

Der Parameter H stellt dabei eine normierende Größe (in Meter) dar, die ich in meinen Beispielen mit einem gewählten H = 7800 m vorausgesetzt habe. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte Skalenhöhe der Atmosphäre für die ersten 100 km. Sie errechnet sich aus der universellen Gaskonstante R, der Temperatur T, der molaren Masse M der Luft und der Erdbeschleunigung g für diesen Atmosphärenbereich. Die Variable h für die Höhe ist daher ebenfalls in der Einheit Meter zu wählen. Die Proportionalität der Dichte zur Brechungsindex-Differenz (n-1) bringt diese Zusammenhänge in eine Form, mit welcher eine Höhenabhängigkeit des Brechungsindizes hergeleitet werden kann.

$$\frac{\delta(h)}{\delta(0)} \approx \frac{n(h)-1}{n_B - 1} \approx e^{-h/H} \qquad mit \qquad H = 7800m \qquad H = \frac{R \cdot T}{M \cdot g} \qquad (in \quad Bodennähe)$$

$$\rightarrow \; -\ln\left(\frac{n-1}{n_B - 1}\right) \cdot H = h(n) \qquad bzw. \qquad \Rightarrow \underline{\underline{n(h) = (n_B - 1) \cdot e^{-h/H} + 1}}$$

Die Höhengleichung h(n) kann jetzt in das Integral zur Berechnung der Winkelabweichung $\Delta\alpha$ eingesetzt werden. Die Variable r im Integral wird dann durch die Summe r = r_E + h(n) ersetzt.

$$\Delta\alpha = \int_{n0}^{nB} \frac{1}{n} \cdot \frac{\dfrac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{r \cdot n}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{r \cdot n}\right)^2}} \cdot dn$$

$$\Delta\alpha = \int_{n0}^{nB} \frac{\dfrac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{(r_E + h) \cdot n}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{(r_E + h) \cdot n}\right)^2}} \cdot \frac{dn}{n} = \underline{\underline{\int_{n0}^{nB} \frac{\dfrac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{\left(r_E - \ln\left(\dfrac{n-1}{n_B - 1}\right) \cdot H\right) \cdot n}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{n_B \cdot r_E \cdot \sin\gamma_B}{\left(r_E - \ln\left(\dfrac{n-1}{n_B - 1}\right) \cdot H\right) \cdot n}\right)^2}} \cdot \frac{dn}{n}}}$$

Das ist die Refraktionsgleichung zur Berechnung der Winkeldifferenz $\Delta\alpha$, die nur noch von der Variablen n abhängt. Alle anderen Parameter sind feste bzw. konstante Werte, die für die kommenden Beispiele so gewählt wurden:

r_E = 6367250 m
n_{Br} = 1,0002914 (rotes Licht)
n_{Bg} = 1,0002931 (grünes Licht)
n_{Bb} = 1,0002955 (blaues Licht)

γ_B = 90° (Blick zum Horizont) H = 7800 m
n_0 = 1 (Brechungsindex im Vakuum)

=> berechnet mit dem Online-Integrator / Mathematica von *Wolfram Research*:
(für grünes Licht)

$$\int_{1.0000000}^{1.0002931} \frac{1.0002931 \times 6\,367\,250}{\left(\left(\left(6\,367\,250 - 7800 \log\left(\frac{n-1}{0.0002931}\right)\right) n\right) \sqrt{1 - \left(\frac{1.0002931 \times 6\,367\,250}{\left(6\,367\,250 - 7800 \log\left(\frac{n-1}{0.0002931}\right)\right) n}\right)^2}\right) n} \, dn$$

$$= 0.0117297$$

Hieraus ergeben sich dann für die verschiedenen Wellenlängen die Refraktionswinkel in rad:

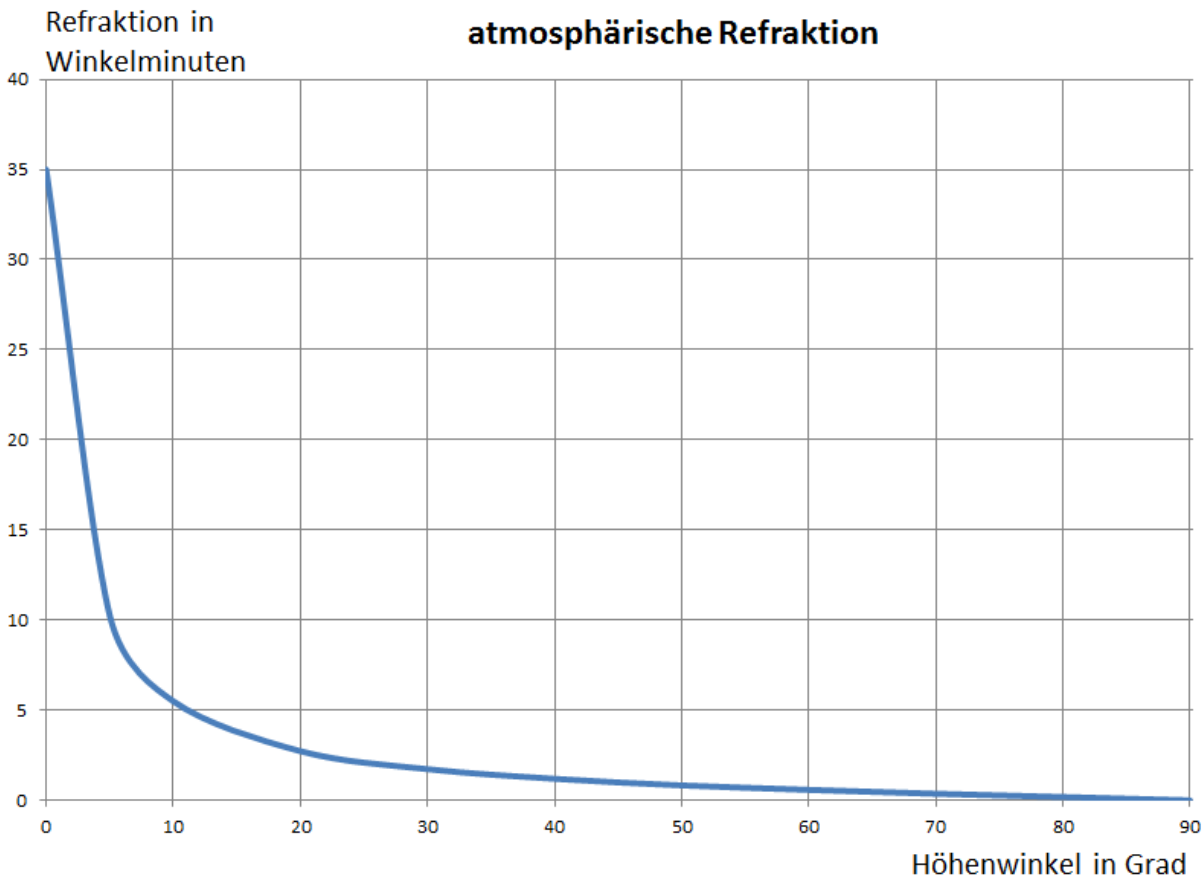
$\Delta\alpha$ r = 0,0116531 rad (= 2403,6" Winkelsekunden bei rotem Licht)
$\Delta\alpha$ g = 0,0117297 rad (= 2419,4" Winkelsekunden bei grünem Licht)
$\Delta\alpha$ b = 0,0118379 rad (= 2441,7" Winkelsekunden bei blauem Licht)

D.h., die Differenzwinkel zwischen diesen Refraktionswinkeln haben dann diese Werte:

$\Delta\alpha$ g - $\Delta\alpha$ r = 15,8" Winkelsekunden bei grün <=> rot
$\Delta\alpha$ b - $\Delta\alpha$ r = 38,1" Winkelsekunden bei blau <=> rot

Das wären die Winkeldifferenzen beim "Green Flash" und "Blue Flash", die sich zwischen der roten Sonnenscheibe und der grünen/blauen Sonnenscheibe ergeben würden.

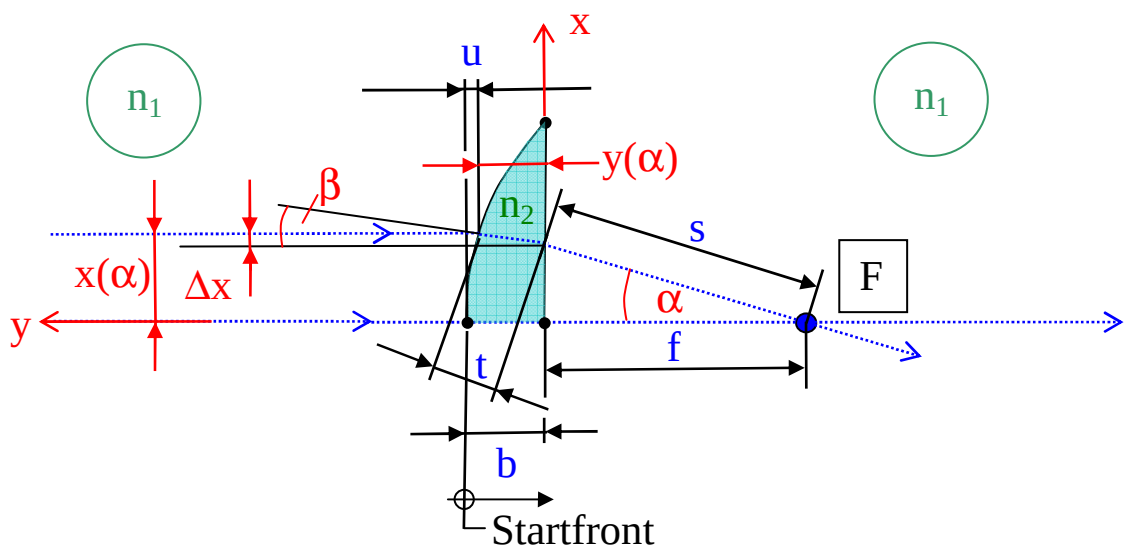
Abschließend soll die Abhängigkeit der atmosphärischen Refraktion hinsichtlich des Höhenwinkels über dem Horizont gezeigt werden. Die Winkelabweichung nimmt innerhalb der ersten 10 Winkelgrade des Höhenwinkels rapide ab und beträgt dann weniger als 5 Winkelminuten. Schon innerhalb des ersten Winkelgrads verringert sich die Refraktion um etwa 13 Winkelminuten. Bei einem Höhenwinkel von etwa 0,5 Grad (annähernd Durchmesser der Sonnenscheibe) sind es bereits um die 7 Winkelminuten. Wir werden am Ende des Skripts noch sehen, was sich hieraus beim Sonnenuntergang als Konsequenz ergibt.



4.2 Die Formfunktion der Linse:

Um eine genauere Beschreibung von der Formfunktion der Linse zu erhalten, stellen wir uns vor, dass Parallelstrahlen aus dem Unendlichen kommen (linke Seite in der Skizze) und auf die Linsenoberfläche treffen. Dort wird der Strahl gebrochen, legt innerhalb der Linse den Weg t zurück, um dann wieder beim Austritt gebrochen zu werden. Danach verläuft der Strahl entlang des Weges s durch den Brennpunkt F.
Um einen Startpunkt bei dem Lichtpfad zu bekommen, legen wir eine Vertikale fest, die in Berührung mit der Linse der Dicke b steht. Von dieser Vertikal aus (Startfront der Lichtwelle) legt der Strahl anfangs den Weg u zurück. Die Distanz vom Brennpunkt bis zur ebenen Rückseite der Linse sei hier mit f gekennzeichnet. Außerhalb der Linse ist der Brechungsindex der Umgebung mit n_1 bezeichnet, innerhalb der Linse mit n_2.

Nun lässt sich die Zeitbedingung gemäß der Methode der Gleichzeitigkeit aufstellen. Einmal gibt es den direkten und geraden Weg, wenn das Licht horizontal durch die Linse mit dem Breitenwert b verläuft. Die allgemeine Situation wird dagegen durch einen abgeknickten Pfad beschrieben, bei welchem die Winkel α und β auftauchen. Die Forderung ist dann, dass alle Pfade in derselben Zeit beim Punkt F ankommen.



Da sich die Lichtgeschwindigkeiten umgekehrt proportional zu den Brechungsindizes verhalten, kann man die Zeitbedingung vereinfacht so darstellen, dass die verschiedenen Strecken mit den entsprechenden Brechungsindizes multipliziert werden.

$$b \cdot n_2 + f \cdot n_1 = const. = s \cdot n_1 + t \cdot n_2 + u \cdot n_1$$

$$b \cdot n_2 + f \cdot n_1 = \frac{f}{\cos\alpha} \cdot n_1 + \frac{y}{\cos\beta} \cdot n_2 + (b - y) \cdot n_1$$

$$\rightarrow b \cdot \frac{n_2}{n_1} + f = \frac{f}{\cos\alpha} + \frac{y}{\cos\beta} \cdot \frac{n_2}{n_1} + b - y$$

$$\rightarrow b \cdot \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) + f \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right) = y \cdot \left(\frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{b \cdot \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) + f \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)}{\frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{n_2}{n_1} - 1}$$

Das Brechungsgesetz lässt sich dann umformen in:

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha \qquad \cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = 1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2$$

$$\rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}$$

$$\Rightarrow y(\alpha) = \frac{b\cdot\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)+f\cdot\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}}\cdot\frac{n_2}{n_1}-1}$$

Das wäre die Formfunktion y in Abhängigkeit vom Winkel α, welcher durch den Brennpunkt F geht. Vorteilhafter ist jedoch eine Beschreibung der Funktion in kartesischen Koordinaten, also in der Form y(x). Um diese Umformung durchführen zu können, ist es notwendig, die Differenz Δx(α) zu berechnen.

$$\Delta x = y(x)\cdot\tan\beta \qquad \textit{und} \qquad x = f\cdot\tan\alpha + \Delta x$$

Mittels des folgenden Additionstheorems und des Brechungsgesetzes kann der tan β auch in Abhängigkeit von α und in Sinus-Terme ausgedrückt werden.

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sin\alpha}{\frac{n_2}{n_1}\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}}$$

Damit erhält man das Δx(α) in der direkten Abhängigkeit von α:

$$\Delta x = y(\alpha)\cdot\frac{\sin\alpha}{\frac{n_2}{n_1}\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}} = y(\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}}}$$

$$\Delta x = \frac{b\cdot\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)+f\cdot\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)}{\sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}\cdot\frac{n_2}{n_1}-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}{\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}}} = \frac{b\cdot\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)+f\cdot\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin\alpha}-\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2-1}}$$

$$\Rightarrow x(\alpha) = \frac{b\cdot\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)+f\cdot\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin\alpha}-\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2-1}}+f\cdot\tan\alpha$$

An dieser Stelle hätten wir nun die beiden Koordinaten x(α) und y(α), die als Parameterfunktionen zusammengehören und in einem kartesischen Koordinatensystem aufgetragen werden können.

Der Funktionsverlauf y(x) soll an einem Beispiel verdeutlicht werden, dessen Parameter dergestalt gewählt wurden:

$n_1 = 1$ $n_2 = 1{,}333$ $f = 15$ $b = 5$

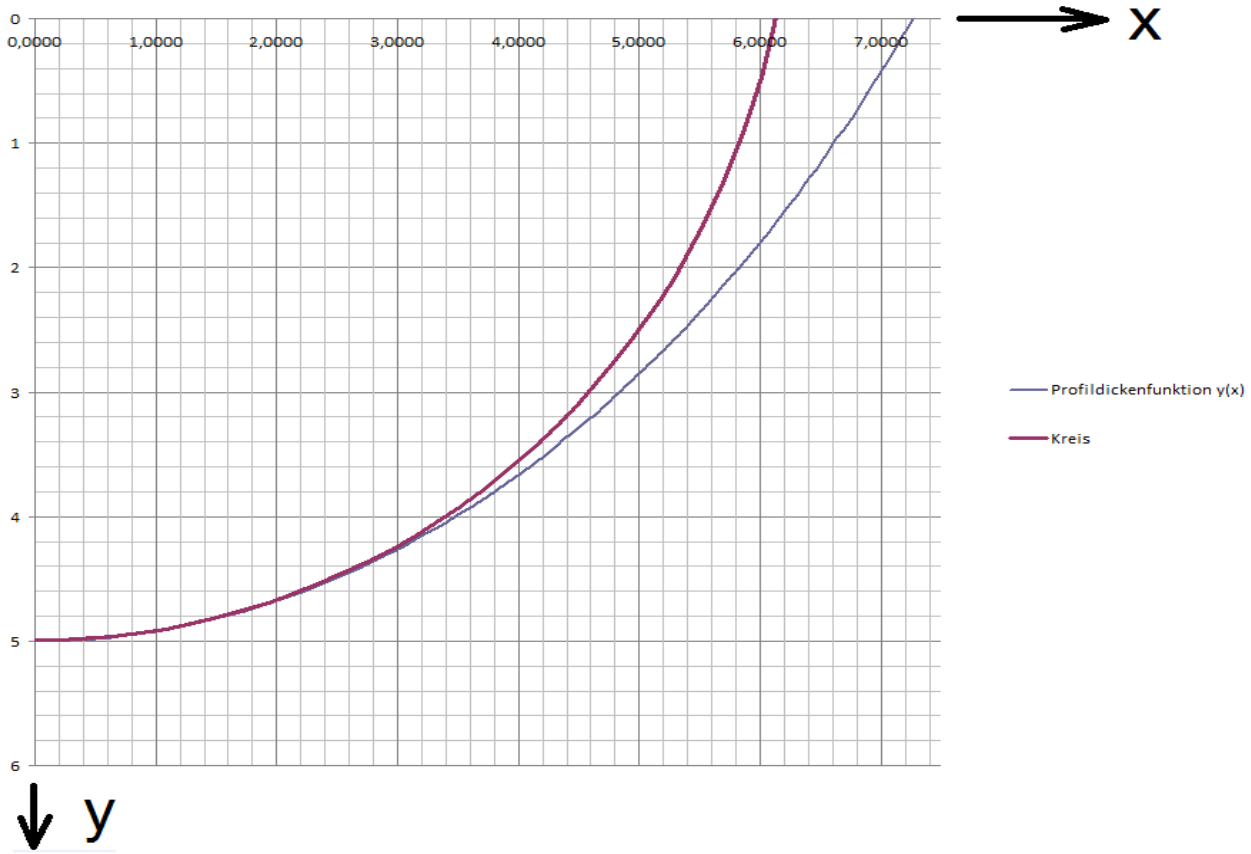
Anhand dieses Beispiels wurde ergänzend noch der Kreisradius eingezeichnet, welcher als Krümmungsradius an der Stelle x = 0 bzw. y = b = 5 vorliegt.

Der Krümmungsradius wurde R = 6,25 gewählt. Für die Berechnung des Krümmungsradius bei dicken Linsen gilt die Näherung:

$$R_{dick} \approx f\cdot\frac{n_2-n_1}{n_1}+b\cdot\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für dünne Linsen kann der folgende Näherungswert genommen werden:

$$R_{dünn} \approx f \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_1}$$: gilt ganz gut bis Winkelwerte α = +/- 5°



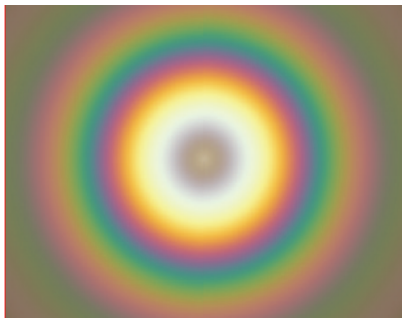
4.3 Von Glorien und Heiligenscheinen: Der Tunneleffekt am Wassertropfen

Im Kapitel 3.2 haben wir über das Phänomen des Regenbogens erfahren, dass ein Lichtstrahl von der Sonne, welcher den Regentropfen außen gerade noch tangieren würde, sich in einem theoretischen Differenzwinkel δ_0 von minimal 14,4° (rotes Licht) zum Beobachter bewegen würde. Der Lichtstrahl wird dabei in den Regentropfen gebrochen, dort einmal reflektiert, und tritt dann wieder unter dieser Winkeldifferenz heraus. D.h., bei den besonderen Lichterscheinungen, die sich "Glorien" oder "Heiligenscheine" nennen, kann diese Art der Erklärung nicht angeführt werden, um das Licht direkt wieder zum Beobachter zurückzuwerfen. Aber zuerst eine kurze Zusammenfassung, um was es sich bei den Glorien, Heiligenscheinen und Brockengespenstern handelt.

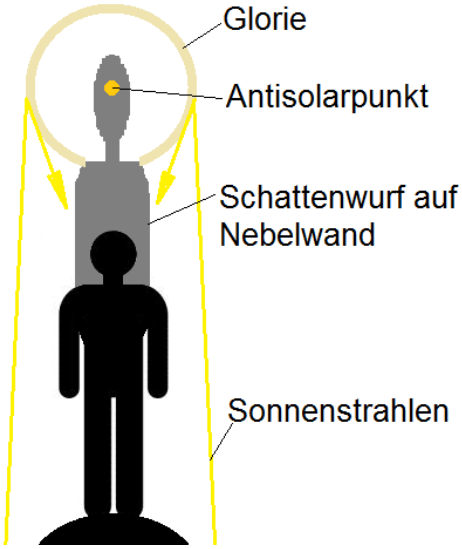
Heiligenschein:
Dieses Phänomen stellt sich ein, wenn sich beispielsweise sehr früh am morgen auf einer Wiese noch Tautropfen auf einer Wiese oder auf den Blättern von Pflanzen befinden. Schaut man dann von der Sonne abgewendet auf seinen eigenen Schatten, dann kann es vorkommen, dass sich um den Kopf herum eine kreisrunde Lichterscheinung zeigt. Das durch den Tautropfen fokussierte Licht wird dabei durch den Hintergrund (Pflanzenblätter) rückgestreut und erscheint dann als hell-weißer Kranz, der im Kontrast mit dem Schattenbild des Kopfes steht.

Brockengespenst:
Hierbei handelt es sich ähnlich wie beim Heiligenschein um eine Schattenprojektion des eigenen Körpers, wenn man sich gegenüber einer Nebelwand befindet. Begünstigt wird diese Beobachtung, wenn die Person sich in einer erhöhten Position aufhält wie z.B. auf einem Berg oder im Flugzeug, wo der Schatten häufiger mal auf eine Wolken- oder Nebelwand treffen kann. Auf einem einsamen Berg ist dieses Spektakel besonders eindrucksvoll und gespenstisch, da man sich mit seinem eigenen Schatten konfrontiert sieht, während man im Flugzeug natürlich nur den Schatten des Fluggeräts selbst wahrnimmt.

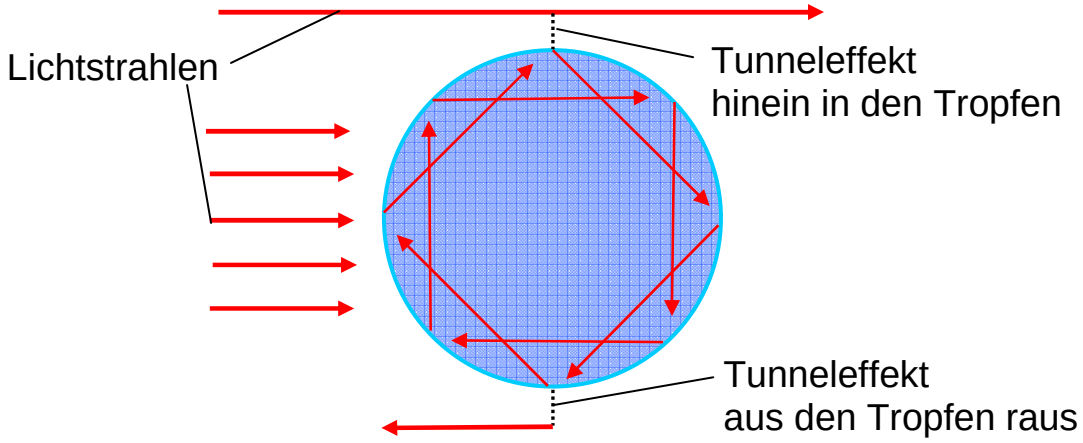
Glorie:
Als Glorie bezeichnet man, wenn sich bei der Erscheinung des Brockengespenstes um den Kopfbereich herum wieder ein kreisrunder Lichtkranz bildet, welcher sogar mehrere farbige Ringe zeigen kann. Dieses Phänomen ist umso eindrucksvoller, sobald mehrere Personen am selben Ort gleichzeitig diese Erscheinung beobachten. Denn jede Person sieht nur um den Schatten des eigenen Kopfes diesen Lichtkranz. Das schließt darauf, dass die Lichtstrahlen in einem nur sehr geringen Kegelwinkel zurückgeworfen werden können. Ein Winkel, der keinesfalls mit dem Differenzwinkel vom Regenbogen zu erklären wäre. Das Zentrum der Glorie ist der Antisolarpunkt (Sonnengegenpunkt), welcher theoretisch in der Symmetrieachse des Kopfschattens in Höhe der Augen liegt.



Farbenkranz (Interferenzbögen) wie er sich bei einer Glorie zeigen kann.



Die Erscheinung der Glorie, so einfach dieses Phänomen vielleicht anmutet, hat im 20. Jahrhundert noch über viele Jahrzehnte hinweg für großes Rätseln gesorgt, diesen Effekt weitestgehend korrekt erklären zu können. Wie gesagt, der Brechungsindex des Wassers würde nicht ausreichen, um einen Lichtstrahl im Tropfen per innerer Reflexion so zurückwerfen zu können, dass er in diesem flachen Winkel beim Betrachter einträfe.
Um diesem Problem zu begegnen, wurden daher Hochleistungscomputer zum Einsatz gebracht, die gemäß der Streuungstheorie von Gustav Mie sämtliche variierenden Tröpfchengrößen ins Kalkül zogen. So konnten vorzeigbare Ergebnisse erst anfangs der 90-er Jahre geliefert werden, um dieses hochkomplexe Thema als Simulation abzubilden. Jedoch um ein etwas anschaulicheres Erklärungsmodell heranziehen zu können, bedurfte es einen weiteren Ausflug in den Bereich der Quantenmechanik, dort wo es den sogenannten Tunneleffekt gibt.
Kurz zusammengefasst heißt das, Lichtstrahlen, welche die Tröpfchen in geringster Distanz verfehlen (sie berühren den Tropfen nicht einmal tangential), können trotzdem eine Energiemenge in Form eines gebrochenen Lichtstrahls im Tropfen beisteuern. Es kommt zum sogenannten Tunneleffekt. Dieser Lichtstrahl kann dann im Innern des Tropfen mehrfach reflektiert werden und in derselben Weise wieder nach außen "tunneln". Es handelt sich hierbei also um ein Quantenphänomen, welches sich sogar in makroskopischen Bereichen wie den Tröpfchen einer Nebelwand zeigt. Dieser Tunneleffekt beschränkt sich aber auch nur auf Distanzen, die kaum größer als die Wellenlängen des Lichts sind.



5. Nachwort

Wenn man das gesamte Skript noch einmal Revue passieren lässt, dann können wir als abschließendes Fazit die Aussage treffen, dass allein mit dem "Prinzip der kürzesten Zeit" (Prinzip von Fermat) ein ausgezeichnetes Werkzeug zur Verfügung steht, eine breite Palette von Gesetzmäßigkeiten der Optik und die damit verbundenen Erscheinungen im Großen und Ganzen erklären zu können. Mit dieser Methode vermittelt uns die Natur, dass sich das Verhalten des Lichtes mit jener grundlegend einfachen Beschreibung sehr zufriedenstellend darstellen lässt. Wir bekommen aber auch einen Eindruck davon, dass die im Skript aufgeführten Problemstellungen auch schnell einmal komplexere Formen annehmen können, die uns bei der Lösung der Gleichungen durchaus etwas abfordern, vielleicht auch etwas zu schaffen machen können, wenn die modellhafte Abbildung des Problems nicht adäquat zu vereinfachen geht.

Bei all jenen Formeln und Gleichungen, die in diesem Rahmen hinsichtlich der verschiedenen Lichtphänomene abgeleitet wurden bzw. sich als Erweiterung noch ableiten lassen würden, sie alle besitzen lediglich einen theoretischen Informationsgehalt, der uns rein zahlenmäßig die Natur des Lichts nahe bringt. Die sinnliche Ästhetik eines Regenbogens, der beruhigende rötliche Ton eines Sonnenuntergangs, das flirrende Blau einer Luftspiegelung auf heißem Asphalt, die farbige Glorie beim Brockengespenst u.v.m., sie alle sind wunderbare und emotional beeindruckende Beobachtungen, welche uns die Natur als Schauspiel schenkt. Und wer in Zukunft wieder mal einen Regenbogen zu Gesicht bekommt, wird sich nun daran erinnern, welche speziellen Lichtpfade vornehmlich für die Regenbogenfarben verantwortlich sind. Vor allem wird dem Beobachter mit dem hier vermittelten Wissen bewusst, dass der betrachtete Regenbogen ein ganz persönliches Schauspiel für ihn darstellt. Denn so wie er ihn gerade in diesem Moment sieht, sieht ihn kein anderer in seiner Umgebung. Jeder hat somit seinen ganz "persönlichen" Regenbogen, den er wahrnimmt und mit seinen Gefühlen verknüpfen kann.

Als Ausklang möchte ich noch eine Fotografie vom Abendrot einer deformierten Sonne am Horizont anfügen. Himmelserscheinungen diesen Typs haben vielleicht schon Viele in ihrem Urlaub am Meer beobachten können. Mit den im Skript behandelten Themenpunkten haben wir nunmehr auch die Chance, eine fundierte und plausible Erklärung für die bizarren Formen der Sonnen-Deformation zu finden.

Verformung der Sonnenscheibe durch Inhomogenitäten in der Atmosphäre (Dichtesprünge)

Erklärung:
Da die Winkeldifferenz infolge der atmosphärischen Refraktion am Horizont am stärksten ist (Winkelabweichung zwischen realer und scheinbarer Position), die jedoch innerhalb der ersten 10 Grad Höhenwinkel rapide abfällt, kommt es zu dieser besonderen Verformung der Sonnenscheibe. Schon bei einer Winkeldistanz von einer Sonnenscheibe (entspricht etwa 30

Winkelminuten) verringert sich Refraktionswinkel um ca. 20%. Das hat zur Folge, dass die eigentlich kreisrunde Sonnenscheibe in vertikaler Richtung zusammengestaucht wird.
Die Stauchung der Sonnenscheibe beim Untergang am Horizont kann daher gut beobachtet werden, wenn z.B. freie Sicht auf dem Meer herrscht oder die Landschaft sehr eben und flach ist. Hinzukommend können in den verschiedenen atmosphärischen Schichten sehr unterschiedliche Brechungsverhältnisse vorliegen, wenn die Luftdichten diskontinuierlich verlaufen. Solche Dichtesprünge können beispielsweise eine Folge von rasch erfolgenden Temperaturänderungen in den Luftschichten sein, die wiederum in Abhängigkeit mit den vorliegenden meteorologischen Bedingungen stehen. Die untergehende Sonne kann in diesen Fällen am äußeren Rand sehr ausgefranst aussehen, es kann schichtweise sehr starke Stauchungen geben, aber auch Luftspiegelungen können mit einspielen, wenn das Licht an entsprechenden Grenzflächen reflektiert wird. Die Verzerrungen und Verformungen können sogar soweit gehen, dass der obere Rand der Sonne von der restlichen Sonnenscheibe abgetrennt wird und eine Lücke dazwischen entsteht.

Mit dieser letzten dargelegten Begründung zur Abendrot-Deformation endet nun auch diese Ausarbeitung. Und da als alles bestimmender Ausgangspunkt stets das Prinzip von Fermat angeführt wurde, werde ich zum Schluss noch die Worte von zwei sehr berühmten Naturforschern bzw. Naturphilosophen in Erinnerung rufen, die ihrerseits die Vorgänge in der Natur richtig zu deuten wussten.

Leonardo da Vinci:
Jeder Vorgang in der Natur wird von ihr selbst in der kürzesten Zeit und knappsten Art und Weise ausgeführt, die möglich ist.

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis:
Tritt in der Natur irgendeine Änderung ein, so ist die für diese Änderung notwendige Aktionsmenge die kleinstmögliche.

Quellenverweise und weiterführende Fachliteratur:

Höhere Technische Mechanik - von István Szabó
Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-Tokio, 5.Aufl., zweiter Nachdruck

Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen -
von István Szabó / Birkhäuser Verlag - Basel-Boston-Berlin, 3.Aufl. 1996

Feynman Vorlesungen über Physik: Band 1: Mechanik, Strahlung, Wärme
von Feynman/Leighton/Sands / R.Oldenbourg Verlag München-Wien, 3.Aufl. 1997

"Color and Light in Nature" von David K. Lynch and William Livingston
Cambridge University Press, Second Edition 2001

"Light & Colour in the open air" von M.Minnaert - Professor at the University of Utrecht
G.Bell and Sons, Ltd., London 1959

Spektrum der Wissenschaften: Ausgabe Mai 2012
"Das Leuchten des Heiligenscheins" von H.Moysés Nussenzveig

Wege in die Physikdidaktik: Band 5 - Naturphänomene und Astronomie
Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 2002

"Light - To advanced and scholarship level" von C.B. Dash
The English Universities Press Ltd., London, 1957

Gesammelte Werke . Band 5: Astronomie, Optik und Wahrscheinlichkeitstheorie -
von Felix Haussdorf / Dissertation über die Refraktion des Lichts in der Atmosphäre
Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-Tokio, 2006

"Bestimmung der atmosphärischen Refraktion" Online-Dokument (PDF)
der Internetseite: http://www.astro.uni-jena.de/Teaching/Praktikum/Versuch-B.pdf

Physik - von Paul A. Tipler
Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin-Oxford, 1.Aufl., dritter Nachdruck 2000
Kapitel 30.4 und 30.5 über die Brechung des Lichtes und das Fermatsche Prinzip

"Kegelschnittzirkel": Herstellung und Analyse von historischen Instrumenten
zur Konstruktion der Kegelschnittkurven / Facharbeit zur Mathematik
Rhein-Gymnasium Sinzig, SIL Veranstaltung 14 442 - Speyer 1997

Spektrum der Wissenschaften - Dossier 5/10: Physikalische Unterhaltungen
von Norbert Treitz:
Das Antiparallelogramm: Abrollende Ellipsen, Brennpunkte und Geradführungen - S.35-39

"Sammlung mathematischer Formeln" von H.Sieber und L.Huber
Klettbuch 7121, Offsetdruck: Emil Scheel , 1970